Universität Karlsruhe
Institut für Analysis
Prof. Dr. M. von Renteln
Dipl.-Phys. V. Hoang

WS 2006/2007

2. Übungsblatt - ANALYSIS III

Abgabe: bis Freitag, 10. November 2006, 14.00 Uhr
in den Einwurfkasten neben Zimmer 308

K 5) a) Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen folgender Differentialgleichungen:

$$\text{i)}\quad y'(x) = \frac{2}{x+1}y(x) + (x+1)^2\cos(x) \qquad \text{ii)}\quad y'(x) = y(x) + (x^2 - x + 1)$$

b) Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme

$$\text{i)}\quad y'(x) = \frac{x-2y+3}{x-2y+5},\ y(0) = 0. \qquad \text{ii)}\quad y'(x) + (x - \frac{1}{x})y + \frac{xe^{-x^2}}{y} = 0,\ y(1) = 1.$$

Hinweis zu a) i): Bestimmen Sie eine spezielle Lösung mit dem Ansatz von Lagrange (Variation der Konstanten).

K 6) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y''(x) = 2y(x)y'(x),\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$$

Hinweis: Verwenden Sie den Ansatz $y'(x) = p(y(x))$, wobei $p \in C^1(\mathbb{R})$ eine noch zu bestimmende Funktion ist.

7) Bestimmen Sie alle auf $\mathbb{R}$ definierten Lösungen des Anfangswertproblems

$$y'(x) = \sqrt[3]{y(x)},\ y(0) = 0.$$

BITTE WENDEN!

8) $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig und es gelte

$$|f(x,y)| \leq h(x) \quad (x \in [a,b],\ y \in \mathbb{R})$$

mit einer Funktion $h \in L^1(a,b)$.

a) Zeigen Sie: $y \in C[a,b]$ ist genau dann eine Lösung der Differentialgleichung

$$(1) \qquad y'(x) = f(x, y(x)),\ (x \in [a,b]),$$

wenn für ein $c \in \mathbb{R}$

$$y(x) = \int_a^x f(t, y(t))dt + c$$

gilt.

b) Es sei $y_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Folge von Funktionen, welche die Differentialgleichung (1) lösen, und der punktweise Grenzwert $y(x) := \lim\limits_{n\to\infty} y_n(x)$ existiere für jedes $x \in [a,b]$.

Zeigen Sie: y ist stetig auf $[a,b]$ und ist dort eine Lösung von (1).