Universität Karlsruhe WS 2006/2007
Institut für Analysis
Prof. Dr. M. von Renteln
Dipl.-Phys. V. Hoang

3. Übungsblatt - ANALYSIS III

Abgabe: bis Freitag, 17. November 2006, 14.00 Uhr
in den Einwurfkasten neben Zimmer 308

K 9) a) Bestimmen Sie alle Lösungen folgender Differentialgleichungen:

(i) $$(2yx^2 + 2xy^3 + y)dx + (3y^2 + x)dy = 0$$

(ii) $$(\sin x + \sinh y)dx + \cosh y dy = 0$$

Hinweis zu ii): Es existiert ein Multiplikator $\mu = \mu(x)$.

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'(x) = e^{-x}y^2(x) + y(x) - e^x, \quad y(0) = 2.$$

Hinweis: Es existiert eine spezielle Lösung der Form $y = ae^{bx}$.

K 10) a) Bestimmen Sie die ersten und zweiten Lösungen der Clairautschen Differentialgleichung

$$y = xy' - \sqrt{y' - 1}.$$

b) Bestimmen Sie die singulären Linienelemente von

$$e^{y'} - y' + xy - x - 1 = 0.$$

Existiert eine singuläre Lösung der Differentialgleichung?

11) a) Es seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ offene Intervalle und $D = I \times J \subseteq \mathbb{R}^2,\ f \in C^1(D)$. Durch

$$y_c(x) = f(x,c) \quad (x \in I)$$

wird eine Schar von Kurven definiert. Ferner existiere eine Funktion $\hat{c} \in C^1(I)$ mit

$$\frac{\partial f}{\partial c}(x, \hat{c}(x)) = 0 \quad (x \in I).$$

Zeigen Sie: Die durch $y(x) = f(x, \hat{c}(x))$ definierte Funktion ist eine Einhüllende der Kurvenschar $\{y_c\}_{c \in J}$.

b) Bestimmen Sie die Einhüllende der Geradenschar

$$y_c(x) = cx + e^c \quad (c \in \mathbb{R})$$

auf $I = (-\infty, 0)$.

12) Zeigen Sie: $y(x) = 0$ $(x \in \mathbb{R})$ ist Einhüllende einer Familie von Lösungen der Differentialgleichung

$$y' - \operatorname{sign}(y)|y|^{\frac{1}{3}} = 0.$$

Hierbei ist $\operatorname{sign}(y) = \begin{cases} 1 & y > 0 \\ 0 & y = 0 \\ -1 & y < 0 \end{cases}$.