Universität Karlsruhe WS 2006/2007
Institut für Analysis
Prof. Dr. M. von Renteln
Dipl.-Phys. V. Hoang

6. Übungsblatt - ANALYSIS III

Abgabe: bis Freitag, 8. Dezember 2006, 14.00 Uhr
in den Einwurfkasten neben Zimmer 308

K 21) a) $f \in C(D)$ ($D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen) sei lokal lipschitzstetig bezüglich seines zweiten Arguments, d.h. für jedes $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ existiere eine Umgebung U von (x_0, y_0) in D und ein $k > 0$ mit

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq k|y_1 - y_2| \quad ((x, y_1) \in U,\ (x, y_2) \in U).$$

Beweisen Sie: Zwei Lösungen $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$, welche in einem Punkt von $[a, b]$ übereinstimmen, stimmen auf ganz $[a, b]$ überein.

Hinweis: Satz 3 der Vorlesung.

b) Bestimmen Sie für die Anfangswertaufgabe

$$y' = \frac{xy + y^2}{x^2},\ y(e) = 1,$$

eine Lösung $y_1 : I \to \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften: für jede andere Lösung $y : J \to \mathbb{R}$ der Anfangswertaufgabe gilt $J \subseteq I$ und $y = y_1$ auf J.

K 22) Es sei $f : [0, 5] \times [0, 2] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = x \sin(x^3 + y(3 - y)).$$

Man bestimme ein Intervall $I = [0, \alpha] \subseteq [0, 5], \alpha > 0$, auf dem das AWP $y' = f(x, y),\ y(0) = 1$ eine eindeutige Lösung besitzt.

23) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Arzelà-Ascoli, dass die rekursiv definierte Funktionenfolge

$$f_0(x) = \cos x,\ f_{n+1}(x) = \cos(f_n(x)) + (-1)^n\ (n \in \mathbb{N}_0)$$

auf jedem Intervall $[a, b]$ eine gleichmäßig konvergente Teilfolge besitzt.

24) Es sei $g \in C[0, 1]$ beliebig vorgegeben. Beweisen Sie, dass die Integralgleichung

$$f(x) - \int_0^x f(x - t)e^{-t^2} dt = g(t)$$

eine Lösung $f \in C[0, 1]$ besitzt. Kann es mehrere solcher Lösungen geben?