Universität Karlsruhe WS 2006/2007
Institut für Analysis
Prof. Dr. M. von Renteln
Dipl.-Phys. V. Hoang

7. Übungsblatt - ANALYSIS III

Abgabe: bis Freitag, 15. Dezember 2006, 14.00 Uhr
in den Einwurfkasten neben Zimmer 308

K 25) Es sei $f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i$ eine Potenzreihe mit komplexen Koeffizenten und Konvergenzradius $\rho > 0$. Ferner sei für jede Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$

$$\|A\|^2 := \sum_{i=1,j=1}^{n} |a_{ij}|^2.$$

Im Folgenden identifizieren wir $\mathbb{C}^{n\times n}$ mit $\mathbb{C}^{n^2}$.

a) Zeigen Sie: Für jedes $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $\|A\| < \rho$ ist die Reihe

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i A^i$$

in $\mathbb{C}^{n^2}$ konvergent.

b) Es werde $\exp(A) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} A^i$ gesetzt. Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften der Matrixexponentialfunktion:

i) $\exp(0) = E$ ($n \times n$-Einheitsmatrix)

ii) $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B) = \exp(B)\exp(A)$, falls $AB = BA$

iii) $\exp(A)$ ist invertierbar und es gilt $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$.

K 26) Für $x \in (0,\infty)$ sei das System von Differentialgleichungen gegeben:

$$\mathbf{y}'(x) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2x} & \frac{1}{2x^2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2x} \end{pmatrix} \mathbf{y}(x)$$

Bestimmen Sie eine Fundamentalmatrix $Y(x)$ mit $Y(1) = E$.

27) a) Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $u_1, \ldots, u_n \in C^{n-1}(I)$. Zeigen Sie: sind die $u_1, \ldots, u_n$ linear abhängig, so ist der Rang der $n \times n$-Matrix

$$A(x) = (a_{ij}(x))_{i=0,\ldots,n-1, j=1,\ldots,n}, \quad a_{ij}(x) = u_j^{(i)}(x)$$

auf dem ganzen Intervall $< n$.

b) Finden Sie zwei Funktionen $u_1, u_2 \in C^1(\mathbb{R})$ mit folgender Eigenschaft: es gilt

$$u_1 u_2' - u_2 u_1' = 0$$

auf $\mathbb{R}$, u_1 und u_2 sind jedoch linear unabhängig.

BITTE WENDEN

28) Es sei $D = I \times J \subset \mathbb{R}^2$ offen und $f \in C(D)$ lokal Lipschitzstetig in seinem zweiten Argument. Ferner sei A eine Menge von Funktionen $y : I \to J$ welche die Differentialgleichung

$$y' = f(x, y) \quad (*)$$

lösen und die Eigenschaft besitzen, dass durch jeden Punkt $(x_0, y_0) \in D$ eine Lösung y aus A führt. Beweisen Sie: jede auf $K \subseteq I$ definierte Lösung von $(*)$ stimmt dort mit einer Funktion aus A überein.

Diskutieren Sie ferner die Lösungsmenge der Differentialgleichung $y' = (1 + x)\sqrt{1 - y^2}$.