

9. Übungsblatt - ANALYSIS III

Abgabe: bis Freitag, 12. Januar 2007, 14.00 Uhr
in den Einwurfskasten neben Zimmer 308

K 33) Bestimmen Sie jeweils Lösungen der folgenden Differentialgleichungen, welche die angegebenen Bedingungen erfüllen bzw. deren allgemeine Lösungen:

a) $y''(x) - \frac{1}{2}e^{y(x)} = 0$, $y(0) = 0, y'(0) = 1$

b) $y''(x) + h(y(x)) = 0$, $y(0) = 1, y'(0) = 0$ mit

$$h(x) := \begin{cases} x & : x \geq 0 \\ 4x & : x < 0 \end{cases}$$

c) $y'''(x) - y'(x) = 3e^{2x}$, $\lim_{y \rightarrow \infty} (y - \frac{1}{2}e^{2x}) = 0$

d) $(1 + x^2)y''(x) - 2y(x) = 0$

e) $y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = e^x \sin(x)$

K 34) a) Für Funktionen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei $N(f) = \{x \in [a, b] : f(x) = 0\}$ die Nullstellenmenge von f . Zeigen Sie für $f \in C^1[a, b]$:

$$x_0 \text{ ist Häufungspunkt von } N(f) \Rightarrow x_0 \text{ ist Häufungspunkt von } N(f').$$

b) Es seien $a_0, \dots, a_{n-1} \in C[a, b] (n \in \mathbb{N})$, und es sei $y \in C^n[a, b], y \neq 0$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{n-1}(x) + \dots + a_0(x)y(x) = 0.$$

Zeigen Sie, dass $N(y)$ eine endliche Menge ist.

K 35) Bestimmen Sie eine Funktion $y \in C^1(\mathbb{R})$, welche die Differentialgleichung

$$y''(x) - 4y'(x) + 4|y| = 0$$

löst und die Anfangsbedingung $y(0) = 1, y'(0) = -1$ erfüllt. Ist diese eindeutig bestimmt?

36) Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen folgender Systeme von Differentialgleichungen:

a)

$$y'(x) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} y(x) + \begin{pmatrix} e^{5x} \\ 4 \end{pmatrix}$$

b)

$$y'(x) = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -4 & -4 & -2 \\ 8 & 12 & 6 \end{pmatrix} y(x) + e^{2x} \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \\ -20 \end{pmatrix}$$

Frohe Weihnachten und ein gutes neues Jahr!