Name: Matrikelnummer: Punkte:

Aufgabe 1 [**4+4 Punkte**]

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ mit $\Omega \neq \emptyset$ und $x_0 \in \Omega$. Weiter seien $\mathcal{A}, \mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ σ-Algebren über Ω.

a) Entscheiden Sie, ob die folgenden Objekte σ-Algebren über Ω sind. Begründen Sie ihre Antworten.

(i) $\mathcal{A} \cup \mathcal{E} := \{U : U \in \mathcal{A} \text{ oder } U \in \mathcal{E}\}$

(ii) $\mathcal{A} \cap \mathcal{E} := \{U : U \in \mathcal{A} \text{ und } U \in \mathcal{E}\}$

(iii) $\mathcal{A}_{x_0} := \{U : x_0 \in U \text{ oder } U = \emptyset\}$

b) Gegeben sei der Maßraum $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \nu)$ mit dem Maß $\nu(\{n\}) := 3^{-n}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten die Abbildung $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $g(n) := 2^{n+1}$. Berechnen Sie:

$$(i)\ \nu(\mathbb{N}) \qquad\qquad (ii)\ \int_{\mathbb{N}} g(n)\, \nu(\mathrm{d}n)$$

Hinweis: Es bezeichnet $\mathcal{P}(\Omega)$ die Potenzmenge der Grundemenge Ω. Zur Aufgabe b (ii): Das Integral ist als Integral bezüglich des Maßes ν mit Integrationsvariable n über die Funktion g zu verstehen.

Lösung:

a) **(i)** Dies ist im Allgemeinen keine σ-Algebra. Wähle als Gegenpeispiel $\Omega = \{1, 2, 3\}$ und die σ-Algebren $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, \Omega\}$, $\mathcal{E} = \{\emptyset, \{2\}, \{1, 3\}, \Omega\}$, dann ist die $\mathcal{A} \cup \mathcal{E}$ keine σ-Algebra, da $\{1\}$ und $\{2\}$ in $\mathcal{A} \cup \mathcal{E}$ sind, aber $\{1, 2\}$ nicht.

(ii) Dies ist wieder eine σ-Algebra. Es sind Ω und $\emptyset$ in dem Mengensystem $\mathcal{A} \cap \mathcal{E}$ enthalten. Falls $M \in \mathcal{A} \cap \mathcal{E}$, dann ist $M \in \mathcal{A}$ und $M \in \mathcal{E}$. Damit ist auch $M^c \in \mathcal{A}$ und $M^c \in \mathcal{E}$, und somit ist also $M^c \in \mathcal{A} \cap \mathcal{E}$. Sei nun noch $(A_j)_j$ eine Folge von Mengen in $\mathcal{A} \cap \mathcal{E}$, dann ist $\cup_{j \in \mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A} \cap \mathcal{E}$. Für jedes $j \in \mathbb{N}$ gilt nämlich $A_j \in \mathcal{A}$ und $A_j \in \mathcal{E}$, und da sowohl $\mathcal{A}$ und $\mathcal{E}$ beides σ-Algebren liegt, ist also auch der Grenzwert $\cup_{j \in \mathbb{N}} A_j$ sowohl in $\mathcal{A}$ als auch $\mathcal{E}$ und damit auch in $\mathcal{A} \cap \mathcal{E}$.

(iii) Dies ist im Allgemeinen keine σ-Algebra. Wähle zum Beispiel $\Omega = \mathbb{R}$ und $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ sei nun $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$ mit $x_0 \in M$ beliebig, dann gilt für M^c sofort $x_0 \notin M^c$ und damit ist $M^c \notin \mathcal{A}_{x_0}$.

b) **(i)** $\nu(\mathbb{N}) = \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{n\}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(\{n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n} = \frac{1/3}{1-1/3} = \frac{1}{2}$,

(ii) $\int_{\mathbb{N}} g(n)\, \nu(\mathrm{d}n) = \int_{\mathbb{N}} 2^{n+1}\, \nu(\mathrm{d}n)$
$= \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n+1} 3^{-n} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 2\left(\frac{1}{1-2/3} - 1\right) = 4.$

Name: Matrikelnummer: Punkte:

Aufgabe 2 **[3+3 Punkte]**

Beantworten Sie die folgenden Fragen. Begründen Sie Ihre Antworten.

a) **(i)** Sei $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Folgt im Allgemeinen aus der Messbarkeit von $|f|$ die Messbarkeit von f ?

(ii) Sei $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ differenzierbar. Ist f messbar? Ist f' messbar?

b) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = h(x^2 + y^2)$ für eine streng monoton wachsende Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Desweiteren sei $\mu := \lambda^2 \circ f^{-1}$ das Bildmaß des zweidimensionalen Lebesgue Maßes λ^2 unter f.

(i) Zeigen Sie, dass f $\mathcal{B}^2$-$\mathcal{B}$-messbar ist.

(ii) Bestimmen Sie $\mu([a, b))$ für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ in Abhängigkeit von $h^{-1}(a)$ und $h^{-1}(b)$.

Hinweis: Betrachten Sie für b) (ii) die Menge $f^{-1}((-\infty, a])$ und benutzen Sie, dass h invertierbar ist.

Lösung:

a) **(i)** Wähle $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ mit:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in Q \\ -1 & x \notin Q \end{cases}$$

für ein $Q \notin \mathcal{B}(\mathbb{R})$. (Existenz von Q nach Vorlesung klar.) Es gilt für f nun $f^{-1}(\{1\}) = Q \notin \mathcal{B}$ und somit ist f nicht messbar. Es ist $|f| \equiv 1$ eine messbare Abbildung.

(ii) Da f differenzierbar ist, ist f stetig und damit messbar. Nach Definition ist $f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}(f(x+\frac{1}{n}) - f(x))$ und da f stetig ist ist $g_n(x) := \frac{1}{n}(f(x+\frac{1}{n}) - f(x))$ messbar für jedes $n \in \mathbb{N}$. Damit ist f' als punktweiser Grenzwert messbarer Funktionen messbar.

b) Da h streng monoton wachsend ist, ist h invertierbar. Sei nun $a \in \mathbb{R}$, dann gilt:

$$\begin{aligned} f^{-1}(-\infty, a] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) \leqslant a\} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant h^{-1}(a)\} \\ &= \{z \in \mathbb{R}^2 : |z|^2 \leqslant h^{-1}(a)\} \\ &= \overline{B_{\sqrt{h^{-1}(a)}}(0)} \end{aligned}$$

Da $\overline{B_{\sqrt{h^{-1}(a)}}(0)}$ abgeschlossen ist für jedes $a \in \mathbb{R}$, folgt die Messbarkeit direkt.
Analog bestimmt man für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leqslant b$ das Maß des Intervalls als

$$\begin{aligned} \mu([a, b)) = \lambda^2(f^{-1}([a, b))) &= \lambda^2 \left(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : h^{-1}(a) \leqslant x^2 + y^2 \leqslant h^{-1}(b)\}\right) \\ &= \lambda^2 \left(\{z \in \mathbb{R}^2 : h^{-1}(a) \leqslant |z|^2 \leqslant h^{-1}(b)\}\right) \\ &= \pi(h^{-1}(b) - h^{-1}(a)) \end{aligned}$$

Name: Matrikelnummer: Punkte:

Aufgabe 3 [**8 Punkte**]

Sei $f \in L^2(\mathbb{R})$ und $g : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ gegeben als

$$g(t) := t \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[t,\infty)}(|x|) \, \exp[-t^2(|x|+1)] \, f(x) \, dx.$$

Zeigen Sie, dass $g \in L^1(\mathbb{R})$ ist. Beachten Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{1}_{[t,\infty)}(|x|) = \begin{cases} 1 & |x| \geqslant t \\ 0 & |x| < t \end{cases} \quad \text{gilt.}$$

Hinweis: Benutzen Sie den Satz von Tonelli und zeigen Sie, dass die Abbildung $u(x) := \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[t,\infty)}(|x|) \, |t| \exp[-t^2(|x|+1)] \, dt$ über $\mathbb{R}$ quadratintegrabel ist.

Lösung:

Wir betrachten zunächst die Abbildung aus dem Hinweis. Wir stellen fest, dass sich die Indikatorfunktion umschreiben lässt als

$$\mathbb{1}_{[t,\infty)}(|x|) = \mathbb{1}_{(-\infty,|x|]}(t).$$

Damit gilt für die Abbildung u

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{-\infty}^{|x|} |t| \exp[-t^2(|x|+1)] dt \\ &= -\int_{-\infty}^{0} t \exp[-t^2(|x|+1)] dt + \int_{0}^{|x|} t \exp[-t^2(|x|+1)] dt \\ &= \left[\frac{\exp[-t^2(|x|+1)]}{-2\,(|x|+1)}\right]_0^{|x|} - \left[\frac{\exp[-t^2(|x|+1)]}{-2\,(|x|+1)}\right]_{-\infty}^{0} = \frac{\exp[-|x|^2(|x|+1)] - 2}{-2\,(|x|+1)} \end{aligned}$$

und damit folgt

$$\|u\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} \frac{|\exp[-|x|^2(|x|+1)] - 2|^2}{4\,(|x|+1)^2} dx \leqslant \int_{\mathbb{R}} \frac{4}{4\,(|x|+1)^2} dx = 2.$$

Wir integrieren nun $|g|$

$$\|g\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |g(t)| dt \leqslant \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |t| \mathbb{1}_{[t,\infty)}(|x|) \, \exp[-t^2(|x|+1)] \, |f(x)| \, dx dt.$$

Die Voraussetzungen von Tonelli sind erfüllt, da der Integrand positiv ist und als Multiplikation stetiger und messbarer Abbildungen wieder messbar ist. Die Integrationsreihenfolge ist also unerheblich und wir vertauschen beide Integrale, sodass

$$\begin{aligned} \|g\|_1 &\leqslant \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |t| \mathbb{1}_{[t,\infty)}(|x|) \, \exp[-t^2(|x|+1)] \, |f(x)| \, dt dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} |u(x) f(x)| = \|uf\|_1 \leqslant \|u\|_2 \|f\|_2 < \infty. \end{aligned}$$

Hier haben wir die Hölder-Ungleichung verwendet. Da $f \in L^2(\mathbb{R})$ nach Voraussetzung und $u \in L^2(\mathbb{R})$ folgt die Aussage direkt.

Name: Matrikelnummer: Punkte:

Aufgabe 4 [1+2+2+1 Punkte]

Es seien $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f_n(x) := -\exp(-nx) + \frac{\sin(x\ln(x+1))}{n^2}$ für $n \in \mathbb{N}$.

a) Zeigen Sie, dass $(f_n)_n$ auf $[0,1]$ punktweise konvergiert.

b) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n(x)dx$.

c) Konvergiert $(f_n)_n$ in $L^p([0,1])$ für $p \in [1,\infty)$?

d) Konvergiert $(f_n)_n$ auf $[0,1]$ gleichmäßig?

LÖSUNG:

a) Wir unterscheiden die Fälle $x = 0$ und $x \neq 0$. Für $x = 0$ gilt $f_n(0) = -1 + \frac{1}{n^2} \underset{n\to\infty}{\to} -1$. Für $x \neq 0$ ist $\exp(-nx) \underset{n\to\infty}{\to} 0$ und $\frac{\sin(x\ln(x+1))}{n^2} \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

b) Wenn man den Grenzwert und das Integral vertauschen kann folgt sofort

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n(x)dx = 0,$$

da $(f_n)_n$ punktweise fast überall gegen Null konvergiert. Es gilt

$$|f_n(x)| \leqslant e^{-nx} + \frac{|\sin(x\ln(x+1))|}{n^2} \leqslant 1 + 1 = 2 =: g(x)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in [0,1]$. Es ist f_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ messbar als Komposition stetiger Funktionen. Da g auf $[0,1]$ integrierbar ist, ist der Satz von Lebesgue anwendbar, d.h. der Grenzwert und das Integral können vertauscht werden.

c) Wir überprüfen die Konvergenz in der $L^p([0,1])$-Norm $\|\cdot\|_p$ für $p \in [1,\infty)$. Es sei $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ der punktweise Grenzwert aus Aufgabenteil a). Wir betrachten also

$$\|f_n - f\|_p^p = \int_{[0,1]} |f_n(x) - f(x)|^p dx = \int_{(0,1]} |f_n(x) - 0|^p dx = \|f_n\|_p^p.$$

D.h. es genügt zu zeigen, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n\|_p^p = 0$ gilt. Analog zu b) ist für festes $p \in [1,\infty)$ $0 \leqslant |f_n(x)|^p \leqslant 2^p =: g(x)$ eine majorisierende integrierbare Funktion, sodass nach dem Satz von Lebesgue

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} |f_n(x)|^p dx = \int_{(0,1]} \lim_{n\to\infty} |f_n(x)|^p dx = \int_{(0,1]} |\lim_{n\to\infty} f_n(x)|^p dx = 0.$$

d) Da der punktweise Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ in $x = 0$ unstetig ist, aber f_n stetig für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist, kann die Konvergenz nicht gleichmäßig sein.

Name: Matrikelnummer: Punkte:

Aufgabe 5 **[4+4 Punkte]**

a) Sei V die Pyramide mit den Eckpunkten $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,0)$ und $(0,0,1)$. Zeigen Sie, dass

$$\int_V \exp(x+y+z)\,d(x,y,z) = \frac{e}{2} - 1.$$

b) Sei $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ eine invertierbare Matrix. Es bezeichnet $\|\cdot\|_2$ hier die euklidische Norm in $\mathbb{R}^d$. Zeigen Sie:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \exp(-\|Ax\|_2^2)\,dx = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{|\det A|}.$$

Hinweis: Betrachten Sie für b) die Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ mit $\Phi(x) := Ax$. Sie dürfen verwenden, dass $\int_{\mathbb{R}} \exp(-r^2)dr = \sqrt{\pi}$ gilt.

Lösung:

a) Es ist $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leqslant z \leqslant 1, 0 \leqslant x \leqslant 1-z, 0 \leqslant y \leqslant 1-z-x\}$. Da V kompakt ist und $g : V \to \mathbb{R}$ mit $g(x,y,z) = z\exp(x+y+z)$ stetig ist, ist g integrierbar, daher gilt nach dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}
\int_V z\exp(x+y+z)\,d(x,y,z) &= \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{1-x-z} \exp(x+y+z)\,dydxdz \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-z} (e - \exp(x+z))\,dxdz \\
&= \int_0^1 (e(1-z) - e + \exp(z))\ dz \\
&= \int_0^1 (\exp(z) - ez)\ dz = \frac{e}{2} - 1.
\end{aligned}$$

b) Wir benutzen den Transformationssatz für die Abbildung $\Phi(x) := Ax$. Zunächst ist klar, dass Φ invertierbar ist mit $\Phi^{-1}(x) = A^{-1}x$. Sowohl Φ also auch Φ^{-1} sind auf $\mathbb{R}^d$ stetig differenzierbar. Damit ist Φ ein C^1-Diffeomorphismus und der Transformationssatz ist anwendbar. Die Jacobi-Matrix von Φ ist durch $\Phi'(x) = A$ gegeben und damit ist die Funktionaldeterminate $|\det(\Phi'(x))| = |\det(A)| > 0$. Da die Funktion $x \mapsto \exp(-\|Ax\|_2^2)$ stetig und damit messbar ist gilt also mit der Substitution $\Phi(x) = r$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \exp(-\|Ax\|_2^2)\,dx = \frac{1}{|\det(A)|}\int_{\mathbb{R}^d} \exp(-\|r\|_2^2)\,dr = \frac{1}{|\det(A)|}\int_{\mathbb{R}^d} \prod_{i=1}^d \exp(-r_i^2)\,dr.$$

Das Integral auf der rechten Seite existiert und nach Tonelli gilt,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \prod_{i=1}^d \exp(-r_i^2)\,dr = \prod_{i=1}^d \int_{\mathbb{R}} \exp(-r_i^2)\,dr_i = \pi^{\frac{d}{2}}.$$

Name: Matrikelnummer: Punkte:

Aufgabe 6 [**2+4 Punkte**]

Betrachten Sie den Maßraum $\mathcal{A} = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda^1)$ wobei λ^1 das Lebesguemaß bezeichnet. Sei f ein messbare Abbildungen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f \in L^p([0,1])$ für $p \in [1,\infty]$. Zeigen Sie:

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_{L^p([0,1])} = \|f\|_{L^\infty([0,1])}.$$

Hinweis: Schätzen Sie $\limsup$ und $\liminf$ ab und betrachten Sie für den $\liminf$ die Menge $M_\varepsilon := \{x \in [0,1] : \|f\|_{L^\infty(\mathcal{A})} - \varepsilon < |f(x)|\}$ für ein beliebiges $\varepsilon > 0$. Sie können ohne Beweis verwenden, dass $\lambda^1(M_\varepsilon) > 0$.

Lösung:
Wir schreiben kurz, $\|f\|_{L^\infty([0,1])} = \|f\|_\infty$ und $\|f\|_{L^p([0,1])} = \|f\|_p$. Es gilt mit den dualen koeffizienten $1 + \frac{1}{\infty} = 1$ sofort nach Hölder,

$$\|f\|_p^p = \int_{[0,1]} |f(x)|^p \cdot 1 \, d\lambda^1(x) \leqslant \|f\|_\infty^p \int_{[0,1]} 1 \, d\lambda^1(x) = \|f\|_\infty^p.$$

und damit ist also $\limsup_{p\to\infty} \|f\|_p \leqslant \|f\|_\infty$. Es ist für die Menge aus dem Hinweis,

$$\begin{aligned}
\lambda^1(M_\varepsilon)(\|f\|_\infty - \varepsilon) &= \int_{M_\varepsilon} (\|f\|_\infty - \varepsilon) \, d\lambda^1 \leqslant \int_{M_\varepsilon} |f(x)| \, d\lambda^1 \\
&= \int_{M_\varepsilon} |f(x)| \cdot 1 \, d\lambda^1 \leqslant \left(\int_{M_\varepsilon} |f(x)|^p d\lambda^1 \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{M_\varepsilon} 1^q d\lambda^1 \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leqslant \left(\int_{[0,1]} |f(x)|^p d\lambda^1 \right)^{\frac{1}{p}} \left(\lambda^1(M_\varepsilon) \right)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_p \left(\lambda^1(M_\varepsilon) \right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Hierbei wurde die Hölder-Ungleichung für beliebige duale Koeffizienten $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ mit $p \in [1,\infty)$ verwendet. Da $\lambda^1(M_\varepsilon) > 0$ können wir durch diese Zahl teilen, sodass

$$\left(\lambda^1(M_\varepsilon)\right)^{\frac{1}{p}} (\|f\|_\infty - \varepsilon) \leqslant \|f\|_p.$$

Der Grenzwert $p \to \infty$ auf der linken Seite existiert und $\lim\limits_{p\to\infty} (\lambda^1(M_\varepsilon))^{\frac{1}{p}} = 1$. Daher gilt für $\liminf$ nun

$$\begin{aligned}
&\lim_{p\to\infty} \left(\lambda^1(M_\varepsilon)\right)^{\frac{1}{p}} (\|f\|_\infty - \varepsilon) \leqslant \liminf_{p\to\infty} \|f\|_p \\
&\Rightarrow \|f\|_\infty - \varepsilon \leqslant \liminf_{p\to\infty} \|f\|_p.
\end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt also insgesamt

$$\limsup_{p\to\infty} \|f\|_p \leqslant \|f\|_\infty \leqslant \liminf_{p\to\infty} \|f\|_p.$$

Dies ist äquivalent zu $\lim\limits_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.