Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Marvin Raimund Schulz, M.Sc. B.Sc.

Wintersemester 2019\20
18.12.2019

Karlsruher Institut für Technologie

Analysis III   Probeklausur

Jede Aufgabe wird mit maximal 3 Punkten bewertet. Die Probeklausur wird in den Tutorien nach Weihnachten besprochen. Die Probeklausur „gilt als bestanden“ wer mindestens 6 Punkte erreicht.

Achtung: Tragen Sie auf jedem Blatt, dass Sie abgeben möchten ihren Namen und die Nummer Ihres Tutoriums ein.

1	Montag	14:00 - 15:30	Xaver Wangerpohl	20.30 SR -1.011
2	Montag	14:00 - 15:30	Mats Hansen	20.30 SR 3.068
3	Montag	15:45 - 17:15	Phillip Karcher	20.30 SR 0.014
4	Montag	17:30 - 19:00	Alex Götz	20.30 SR 2.067
5	Mittwoch	08:00 - 09:30	Peter Koepernik	20.30 SR 3.068

Aufgabe 1 [σ-Algebra und Messbarkeit]

Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ und $(\Omega_n, \mathcal{A}_n)$ Messräume und $E \subset \Omega$. Seien $f_n : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\Omega_n, \mathcal{A}_n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Abbildung. Zeigen Sie:

a) $\mathcal{A}|_E := \{A \cap E | A \in \mathcal{A}\}$ ist eine σ-Algebra.

b) Seien nun $g_n : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ Borel-messbare Abbildungen für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$M := \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n(x)}{n} < 1 \right\}$$

eine Borelmenge.

Aufgabe 2 [Grenzwerte]

Sei $f : \mathbb{R} \to [1, \infty)$ stetig und $I = [a, b]$ für $a, b \in [0, \infty)$ mit $a < b$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{b-a} \int_I \left(\sqrt[n]{f} - 1 \right) d\lambda^1 \leqslant \log \left[\max_{x \in I} f(x) \right]$$

Hinweis: Es ist $\sqrt[n]{x} = \exp\left[\frac{\log(x)}{n}\right]$ für $x > 0$. Benutzen Sie $1 + x \leqslant \exp[x] \, \forall x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3 [Integrierbarkeit]

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ Borel-messbar und Lebesgue-integrierbar. Sei

$$g(t) := \int_{[t,t+1]} f \, d\lambda^1.$$

Zeigen Sie:

a) g ist stetig,

b) $\lim_{t\to\infty} g(t) = 0$,

c) g ist Lebesgue-integrierbar.

Hinweis: Betrachten Sie für c) die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n = \int_{[n-1,n+1]} f \, d\lambda^1$.

— bitte wenden —

Aufgabe 4 [Maße]

Sei $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Maßen auf dem Messraum $(X, \mathcal{A})$, $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{A})$ und $\mu := \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu_n$.
Zeigen Sie:

a) μ ist ein Maß,

b) $\int_X f\, d\mu = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \int_X f\, d\mu_n$.