Karlsruher Institut für Technology (KIT)
Institute für Analysis
Dr. I. Anapolitanos

Sommer 2018
18.07.2018

Probeklausur

Analysis für Lehramt.

Bemerkung: Mit 24 Punkten haben Sie die Klausur bestanden

Aufgabe 1 (3 + 3 + 4 + 6 Punkte)

a) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $f(z) = 2x^2 + 4xy - 2y^2 + x + 3y + iv(x, y)$, wobei $x = Re(z)$ und $y = Im(z)$. Überprüfen Sie, ob es v gibt so dass f holomorph in $\mathbb{C}$ ist und Bestimmen Sie gegebenenfalls eine solche Funktion v.

b) Für welche $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ ist die Funktion $f(z) = \begin{cases} \frac{z}{e^z-1}, 0 < |z| < 1 \\ 1, z = 0 \end{cases}$ komplex Differenzierbar? Geben Sie ein die Ableitung gegebenenfalls.

c) (i) Sei $\gamma(t) = e^{i\pi sin(\frac{\pi}{2}t)}, t \in [0, 2]$.Berechnen Sie $\int_\gamma e^z dz$.

(ii) Berechnen Sie das Integral $\int_{|z|=1} z \sin(\frac{1}{z})$, wobei die Kurve einfach geschlossen und positiv orientiert ist.

d) Berechnen Sie den Wert des Integrales $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx$ mit Hilfe des Residuensatzes.

Exercise 2 (6 + 6 + 4 Punkte)

a) Sei $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geqslant \sqrt{x^2 + y^2}, 1 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2, y \geqslant 0\}$ Bestimmen Sie das Integral

$$\int_D 2zd(x, y, z)$$

b) Bestimmen Sie das Jordan Maß des beschränkten Bereichs $A \subset \mathbb{R}^3$, der von den Flächen $z = (x - 1)^2 + y^2$, $z - 2y - 3 = 0$ eingeschlossen wird.

c) Wir betrachten das Integral

$$\int_0^1 \int_{\arcsin(y)}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos(x)\sqrt{1 + \cos(x)^2}.$$

Skizzieren Sie den Integrationsbereich vertauschen Sie die Integrationsreihenfolge und berechnen Sie damit den Wert des Integrals.

Exercise 3 (7 + 3 + 6 Punkte)

a) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Untersuchen Sie, dass System $\vec{y}' = Ay$ auf Stabilität und bestimmen Sie ein Fundamentalsystem davon.

b) Wir betrachten die Matrix $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Gegeben ist, dass $e^{tB} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\vec{y}' = B\vec{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y'' + y = t\cos(t)$.