Aufgabe 1: $(2+4+2$ Punkte$)$

a) Wann erfüllen die Funktionen $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen in $(x, y) \in \mathbb{R}^2$? Nennen Sie den Zusammenhang zur komplexen Differenzierbarkeit einer Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ in dem Punkt $z = x + iy$.

b) Bestimmen Sie zu $u(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ für $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ alle holomorphen Funktionen $g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(g(x + iy)) = u(x, y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

c) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und $|f|$ konstant. Zeigen Sie, dass dann auch f konstant ist.

Aufgabe 2: $(4+4$ Punkte$)$

a) Berechnen Sie $\int_{\gamma_1} \frac{z^2}{z^2+1}$ dz mit $\gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = 2e^{it}$.

b) Berechnen Sie $\int_{\gamma_2} \frac{z}{e^{iz}-1}$ dz mit $\gamma_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = e^{it}$.

Aufgabe 3:(4 Punkte)

Berechnen Sie das Bild von $A = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > \frac{1}{2}\}$ unter der Abbildung $T : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $T(z) = \frac{1}{z}$. Skizzieren Sie A und $T(A)$ in der komplexen Zahlenebene.

Aufgabe 4: $(6+6$ Punkte$)$

Prüfen Sie die folgenden Differentialgleichungen auf eindeutige lokale Lösbarkeit, bestimmen Sie die Lösung und geben Sie mit Begründung das maximale Existenzinterval der Lösung an.

$$y'(t) = \frac{1 + y(t)^2}{(1 + t^2)y(t)}, \; y(0) = 2.$$

$$y'(t) = -\tfrac{1}{t}y(t) - \tfrac{1}{2}y(t)^2, \; y(1) = 2.$$

Aufgabe 5: (4 Punkte)

Gegeben sei die Jordan messbare Menge

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \; 0 \le x \le 1, |y| \le x, |x^2 - z| \le y^2\}$$

und die stetige Funktion $f : V \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = \frac{5}{2}y^2$. Berechnen Sie $\int_V f(x, y, z) d(x, y, z)$.

Auf 1 (a) $\boxed{u_x = v_y\ ,\ u_y = -v_x}$

wenn $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dbar im Punkt $z = x + iy$. dann erfüllen $u, v: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Cauchy Riemansche Differentialgleichungen in (x,y), wobei $u(x,y) = \operatorname{Re} f(x+iy)$, $v(x,y) = \operatorname{Im} f(x+iy)$.

(b) $u(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$

$$u_x = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2} \overset{!}{=} v_y$$

$$u_y = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \overset{!}{=} -v_x.$$

Also $v = \int v_x\, dx = \int \frac{2xy}{x^2+y^2} dx = -\frac{y}{x^2+y^2} + c(y).$

$$\Rightarrow \quad v_y = \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2} + c'(y) \overset{!}{=} \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}$$

Also $c'(y) = 0 \Rightarrow c(y) = c \in \mathbb{R}$.

Oder $v = \frac{-y}{x^2+y^2} + c \Rightarrow g(x+iy) = \frac{x-iy}{x^2+y^2} + ic, c \in \mathbb{R}.$

Das kann man auch schreiben als.

$$g(z) = \frac{\bar{z}}{|z|^2} + ic \Leftrightarrow g(z) = \frac{1}{z} + ic, \; c \in \mathbb{R}.$$

c) $|f|$ konstant $\Rightarrow$ $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und beschränkt $\xRightarrow[\text{Liouville}]{\text{Satz von}}$ f konstant.

(2a) $f(z) = \frac{z^2}{z^2+1}$ ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$. $\pm i$ liegen innerhalb γ_1 also folgt mit dem Residuensatz.

$$\int_{\gamma_1} \underbrace{\frac{z^2}{z^2+1}}_{f} dz = 2\pi i \left(\operatorname{res}(f,-i) + \operatorname{res}(f,i) \right)$$

Da $\frac{z^2}{z^2+1} = \frac{z^2}{(z+i)(z+i)}$ sind $\pm i$ Pole erster Ordnung

Also $\operatorname{res}(f, i) = \lim\limits_{z \to i} (z-i) \frac{z^2}{(z^2+1)} = \frac{i^2}{(i+i)} = \frac{i}{2}$.

$\operatorname{res}(f, -i) = \lim\limits_{z \to -i} (z+i) \frac{z^2}{(z^2+1)} = \frac{(-i)^2}{(-i-i)} = -\frac{i}{2}$.

Also $\int_{\gamma_1} \frac{z^2}{z^2+1} dz = 0$.

4 Eindeutige Lösbarkeit wir hier nicht behandelt.

$$y' = \frac{1+y^2}{(1+t^2)y}$$

$$\Rightarrow \int \frac{y}{1+y^2}\,dy = \int \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

Also $\frac{1}{2}\ln(1+y^2) = \arctan t + C$.

$y(0)=2 \Rightarrow \frac{1}{2}\ln(1+2^2) = \arctan 0 + C \Rightarrow C = \frac{\ln 5}{2}$.

Also $\frac{1}{2}\ln(1+y^2) = \arctan t + \frac{\ln 5}{2}$.

$$\Leftrightarrow \ln(1+y^2) = 2\arctan t + \ln 5.$$

$$\Leftrightarrow y^2 = 5e^{2\arctan t} - 1.$$

Also $y = \sqrt{5e^{2\arctan t} - 1}$

weil $y(1) \cancel{\geq} 2 > 0$ also wählen wir die positive Lösung. Die Lösung existiert wenn $5e^{2\arctan t} - 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow e^{2\arctan t} \geq \frac{1}{5} \Leftrightarrow 2\arctan t \geq -\ln 5 \Leftrightarrow$

$\arctan t \geq -\frac{\ln 5}{2} \underset{\substack{\tan \text{ monoton} \\ \text{wachsend} \\ \text{auf } \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)}}{\iff} t \geq \tan\left(-\frac{\ln 5}{2}\right) = -\tan\left(\frac{\ln 5}{2}\right).$

Also ist $\left[-\tan\left(\frac{\ln 5}{2}\right), \infty\right)$ das Maximale Existenzintervall.

$$y'(t) = -\frac{1}{t}y(t) - \frac{1}{2}y(t)^2 \quad \text{Bernoulli.}$$

Mit $-y^{-2}(t)$ multiplizieren

$$\underbrace{-y^{-2}(t)\,y'(t)}_{u'(t)} = \frac{1}{t}\underbrace{y^{-1}(t)}_{u(t)} + \frac{1}{2}$$

$$u' = \frac{1}{t}u + \frac{1}{2} \iff u' - \frac{1}{t}u = \frac{1}{2}.$$

$$e^{-\int \frac{1}{t}dt} = e^{-\ln t} = \frac{1}{t} \rightsquigarrow \frac{u'}{t} - \frac{u}{t^2} = \frac{1}{2t} \iff$$

$$\frac{u'}{t} + \left(\frac{1}{t}\right)'u = \frac{1}{2t} \iff \left(\frac{u}{t}\right)' = \frac{1}{2t} \iff$$

$$\frac{u}{t} = \int \frac{1}{2t}dt = \frac{\ln t}{2} + c \iff u = \frac{t\ln t}{2} + ct.$$

Also $y = \frac{1}{u} = \frac{1}{\frac{t\ln t}{2} + ct}.$

$y(1)=2 \Rightarrow \quad 2 = \dfrac{1}{2\cdot 1 \ln 1 + c\cdot 1} \Rightarrow c = \frac{1}{2}$.

Also $\quad y = \dfrac{2}{t\ln t + t} = \dfrac{2}{t(\ln t + 1)}$.

Die Funktion $\quad \dfrac{2}{t(\ln t + 1)}$

ist definiert wenn $t>0$ und

$\ln t + 1 \neq 0 \Leftrightarrow t \neq \frac{1}{e}$. Da die

Anfangsbedingung an der Stelle

$1 > \frac{1}{e}$ gegeben wird ist das

Maximale Existenzintervall $\left(\frac{1}{e}, \infty\right)$.

5) $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 0\le x\le 1,\ |y|\le x,\ |x^2-z|\le y^2\}$

$x\in[0,1]$

$y\in[-x,x]$

$z<x^2:\ -z\le -x^2+y^2,\ z\ge +x^2-y^2\ge 0$

$z>x^2:\ z\le x^2+y^2$

$$\int_0^1\int_{-x}^{x}\left(\int_{x^2-y^2}^{x^2+y^2}\frac{5}{2}y^2\,dz\right)dy\,dx$$

$$=\int_0^1\int_{-x}^{x}\frac{5}{2}y^2(2y^2)\,dy\,dx=\int_0^1[y^5]_{-x}^{x}\,dx$$

$$=\int_0^1 2x^5\,dx=\left[\frac{1}{3}x^6\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

Erklärung – Ergänzung.

$|x^2-z|\le y^2 \iff |z-x^2|\le y^2$

$\iff -y^2\le z-x^2\le y^2 \iff x^2-y^2\le z\le x^2+y^2$

Also

$V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: 0\le x\le 1,\ -x\le y\le x,\ x^2-y^2\le z\le x^2+y^2\}$.

Das erklärt die obigen Integrationsgrenzen.