1.4. Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen

Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen und $F : G \to \mathbb{C}$. Es gilt $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$. Durch $u(x,y) := (Re\, F)(x+iy)$ und $v(x,y) = (Im\, F)(x+iy)$ für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x+iy \in G$ erhält man eine Funktion $G \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto \binom{u(x,y)}{v(x,y)}$.

Ist F in $x_0 + iy_0 \in G$ komplex diffbar, $\implies \partial_x u(x_0, y_0) = \partial_y v(x_0, y_0), \quad \partial_y u(x_0, y_0) = -\partial_x v(x_0, y_0)$.

2.4. Folgerungen der Cauchyschen Integralformel: Unter den Voraussetzungen der Cauchyschen Integralformel gilt

$$F^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{F(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\, d\zeta, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Kugelkoordinaten im $\mathbb{R}^3$ Man schreibt $r = \|(x,y,z)\| = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$ und

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(r, \varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \sin\vartheta \\ r \sin\varphi \sin\vartheta \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix}, \qquad \text{dann} \quad |\det \Phi'(r,\varphi,\vartheta)| = r^2 \sin\vartheta.$$

partikuläre Lösung

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = e^{ax}\cos(bx) r(x) \text{ oder } e^{ax} \sin(bx) r(x).$$

$r(x)$ Polynom von Grad m $p(\lambda)$ charakteristisches Polynom. Ist $a + bi$ eine n-fache Nullstelle von p ($n = 0$ bedeutet keine Nullstelle) so hat eine partikuläre Lösung die Form

$$y_p(x) = x^n (e^{ax} \cos(bx) r_1(x) + e^{ax} \sin(bx) r_2(x)),$$

r_1, r_2 Polynome vom Grad m mit Koeffizienten zu bestimmen.

homogene Lösung Eine n-fache Nullstelle $\lambda \in \mathbb{R}$ des charakteristischen Polynomes liefert die Lösung $(c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0)e^{\lambda x}$. Ein n-faches paar von Nullstellen $a \pm bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ liefert $(c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0) e^{ax}\cos(bx) + (d_{n-1}x^{n-1} + \cdots + d_1 x + d_0) e^{ax} \sin(bx)$.

Variation der Konstanten Ist $\Phi(t)$ ein Fundamentalsystem für $\vec{y}\,'(t) = A(t)\vec{y}\,(t)$ auf I, so ist $\vec{y}(t) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}\vec{y}_0 + \Phi(t)\int_{t_0}^t \Phi(\tau)^{-1}\vec{b}(\tau)\, d\tau, \quad t \in I$, die eindeutige Lösung von

$$\begin{aligned} \vec{y}\,' &= A(t)\vec{y} + \vec{b}(t), \quad t \in I, \\ \vec{y}(t_0) &= \vec{y}_0. \end{aligned}$$

Hinweis für Differentialgleichungssysteme Ist λ ein Eigenwert von A mit algebraischer Vielfachheit m so hat $\mathrm{Kern}(A - \lambda I)^m$ immer Dimension m.

Potenzreihen $\cos(x) = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \qquad \sin(x) = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$