1 Differenzierbarkeit und Holomorphie Komplexwertiger Funktionen

1.1. Integral und Ableitung von komplexwertigen Funktionen reeller Variable Sei $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ eine Funktion und $u(t) := \mathrm{Re}\,(f(t))$ und $v(t) := \mathrm{Im}\,(f(t))$. Die Funktion f heißt (Riemann-)integrierbar (bzw. differentierbar in t_0), falls u **und** v integrierbar (bzw. differenzierbar in t_0) sind. In diesem Falle setzen wir

$$\int_a^b f(t)\,dt := \int_a^b u(t)\,dt + i\int_a^b v(t)\,dt \text{ (Integral von } f) \text{ ,}$$

bzw.

$$f'(t_0) := u'(t_0) + iv'(t_0) \text{ (Ableitung von } f \text{ in } t_0).$$

Das Integral ist $\mathbb{C}$-linear ($\int_a^b (\alpha f + \beta g)\,dt = \alpha\int_a^b f\,dt + \beta\int_a^b g\,dt, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$) und so ist die Ableitung. Es gelten die Produkt-, Quotienten- und die Kettenregel. Der Hauptsatz gilt für komplexwertige Funktionen, also können Integrale mit Hilfe von Stammfunktionen berechnet werden. Weiter gelten die Regeln der partiellen Integration und der Substitution.

1.2. Komplexe Differenzierbarkeit und Holomorphie Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $F : G \to \mathbb{C}$ heißt in $z_0 \in G$ komplex differenzierbar, wenn der Limes

$$F'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0}$$

in $\mathbb{C}$ existiert. In diesem Fall heißt $F'(z_0)$ die komplexe Ableitung von F in z_0.

Die Funktion F heißt holomorph in G, falls F in **jedem** $z_0 \in G$ komplex differenzierbar ist.

1.3. Rechenregeln Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen und seien $F, H : G \to \mathbb{C}$ in G holomorph. Dann sind $F + H$, $F \cdot H$ in G holomorph und

$$(F + H)'(z) = F'(z) + H'(z), \qquad (F \cdot H)'(z) = F'(z)H(z) + F(z)H'(z), \qquad \text{für alle } z \in G.$$

Ist $H \neq 0$ in G, so ist auch $\frac{F}{H}$ holomorph in G und

$$\left(\frac{F}{H}\right)'(z) = \frac{F'(z)H(z) - F(z)H'(z)}{H(z)^2}, \qquad z \in G.$$

Also: Summen-, Produkt- und Quotientenregel (solange der Nenner $\neq 0$ ist) gelten auch für die komplexe Differenzierbarkeit. Ebenso gelten die Kettenregel und die Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion auch für die komplexe Differenzierbarkeit.

1.4. Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen

Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen und $F : G \to \mathbb{C}$. Es gilt $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$. Durch $u(x,y) := (Re\,F)(x+iy)$ und $v(x,y) = (Im\,F)(x+iy)$ für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x + iy \in G$ erhält man eine Funktion $G \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto \binom{u(x,y)}{v(x,y)}$.

Satz 1.4.1: Ist F in $z_0 = x_0 + iy_0 \in G$ komplex differenzierbar, dann gilt im Punkt (x_0, y_0):

$$\partial_x u = \partial_y v, \qquad \partial_y u = -\partial_x v.$$

Diese partiellen Differentialgleichungen heißen Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen (CR-Dgln) für u und v, die also auf G erfüllt sind, wenn F holomorph auf G ist.

Umgekehrt gilt der

Satz 1.4.2: Ist $(x,y) \mapsto \binom{u(x,y)}{v(x,y)}$ eine C^1-Funktion auf G und gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, so ist die durch $F(x+iy) := u(x,y) + iv(x,y)$ definierte Funktion in G holomorph.

2 Kurvenintegrale Cauchyscher Integralsatz, Cauchyscher Integralformel und Folgerungen

2.1. Kurvenintegrale Eine Kurve ist hier eine stetige Abbildung $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, für die es $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ so gibt, dass γ auf jedem Intervall $[t_{j-1}, t_j]$, $j = 1, \ldots, n$, stetig differenzierbar ist. Die Kurve γ heißt einfach geschlossen, falls $\gamma(a) = \gamma(b)$ gilt und γ auf $[a,b)$ injektiv ist. Eine einfach geschlossene Kurve heißt positiv orientiert, wenn das von γ umlaufene Gebiet links von γ liegt.

Dabei heißt γ in $t_* \in [a,b]$ differenzierbar, falls der folgende Limes in $\mathbb{C}$ existiert

$$\dot{\gamma}(t_*) = \lim_{t \to t_*} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_*)}{t - t_*}.$$

Bemerkung 2.1.1: Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen, $F : G \to \mathbb{C}$ holomorph und $\gamma : [a,b] \to G$ differenzierbar. Dann ist $F \circ \gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ differenzierbar und

$$(F \circ \gamma)^{\cdot}(t) = F'(\gamma(t))\dot{\gamma}(t), \quad t \in [a,b].$$

Definition 2.1.2: Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ eine Kurve und $F : \gamma([a,b]) \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Dann definiert man das Kurvenintegral

$$\int_\gamma F(z)\, dz := \int_a^b F(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)\, dt,$$

wobei die rechte Seite als $\sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} F(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)\, dt$ zu verstehen ist, wenn $t_0, \ldots, t_n$ wie oben in der Definition sind. Das Integral ist invariant unter orientierungserhaltenden Umparametrisierungen.

Abschätzung 2.1.3: Sind F und γ wie in der Definition 2.1.2, so gilt

$$\Big| \int_\gamma F(z)\, dz \Big| \le L(\gamma)\, \max\{|F(z)| : z \in \gamma([a,b])\},$$

wobei $L(\gamma)$ die Länge von γ bezeichnet.

Lemma 2.1.4 Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen, $f : G \to \mathbb{C}$ und $\gamma : [a,b] \to G$ eine geschlossene Kurve. Ist die Spur von γ Teilmenge von G, und besitzt f eine Stammfunktion F dann gilt

$$\int_\gamma f(z)\, dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Insbesondere ist γ geschlossen dann $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$.

2.2. Cauchyscher Integralsatz Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen und einfach zusammenhängend, $F : G \to \mathbb{C}$ holomorph und $\gamma : [a,b] \to G$ eine einfach geschlossene, positiv orientierte Kurve. Ist der von γ begrenzte Bereich (Bereich der innerhalb der Kurve γ liegt) Teilmenge von G, dann gilt

$$\int_\gamma F(z)\, dz = 0.$$

Das praktisch bedeutet: Ist F differenzierbar auf γ und innerhalb von γ, wobei γ eine positiv orientierte Kurve, dann ist $\int_\gamma F(z)\,dz = 0$.

Variante des Cauchyschen Integralsatzes: Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen und einfach zusammenhängend, und $\gamma : [a,b] \to G$ eine einfach geschlossene, positiv orientierte Kurve. Seien Δ_k, $k = 1, ..., n$ disjunkte Kreisscheiben die im von γ eingeschlossenen Bereich liegen mit positiv orientierten Rändern γ_k und Zentren b_k. Ist $F : G/\{b_1, ..., b_k\} \to \mathbb{C}$ holomorph dann gilt $\int_\gamma F(z)dz = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} F(z)dz$.

2.3. Cauchysche Integralformel Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen und einfach zusammenhängend, $F : G \to \mathbb{C}$ holomorph und $\gamma : [a,b] \to G$ eine einfach geschlossene, positiv orientierte Kurve. Dann gilt für jedes z, welches "innerhalb von γ" liegt:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{F(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

2.4. Folgerungen (a) Holomorphe Funktionen sind beliebig oft komplex differenzierbar. Unter den Voraussetzungen der Cauchyschen Integralformel gilt

$$F^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{F(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\, d\zeta, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

(b) Holomorphe Funktionen lassen sich lokal in **Potenzreihen** entwickeln. Ist G offen, $F : G \to \mathbb{C}$ holomorph und $z_0 \in G$, so gilt

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k, \quad |z - z_0| < R,$$

für jedes $R > 0$ mit $\{z : |z - z_0| < R\} \subset G$. Die Reihe konvergiert dabei absolut und für jedes $\rho \in (0, R)$ auf $\{z : |z - z_0| < R\}$ gleichmäßig.

2.5. Liouville's Theorem Sei $F : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ holomorph. Wenn F beschränkt ist dann ist F konstant.

2.6. Die Nullmenge einer holomoprhen Funktion Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen wegzusammenhängend und $F : G \mapsto \mathbb{C}$ holomorph, die nicht die Null Funktion ist. Ist $z_0 \in G$ mit $F(z_0) = 0$ so existiert ein $\delta > 0$ so dass für $F(z) \neq 0$ wenn $0 < |z - z_0| < \delta$.

3 Isolierte Singularitäten und Residuensatz

3.1 Isolierte Singularitäten

Definition 3.1.1: Eine isolierte Singularität einer Funktion F ist ein Punkt einzelne Punkt, der aus dem Definitionsbereich von F fehlt.

Ist z_0 isolierte Singularität von F so gibt es die folgenden drei Möglichkeiten

(1) $F(z)$ ist beschränkt in einer Umgebung von z_0.

(2) $\lim_{z \to z_0} |F(z)| = \infty$

(3) Sonst

Satz 3.1.2: Riemanscher Hebbarkeitssatz Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen und einfach zusammenhängend. Sei $z_0 \in G$ und $F : G/\{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Ist F beschränkt in einer Umgebung von z_0 (Fall (1)) so lässt sich F in z_0 holomorph fortsetzen.

Auf Grund des Satzes 3.1.2 heißt eine isolierte Singularität z_0 von F mit $F(z)$ beschränkt in einer Umgebung von z_0 (Fall (1)) eine hebbare Singularität von F.

Satz 3.1.3 Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen und einfach zusammenhängend. Sei $z_0 \in G$ und $F : G/\{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Gilt $\lim_{z\to z_0} |F(z)| = \infty$ dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ so dass die Funktion $(z - z_0)^n F(z)$ sich in z_0 holomorph fortsetzen lässt.

Auf Grund des Satzes 3.1.3 heißt eine isolierte Singularität z_0 von F mit $\lim_{z\to z_0} |F(z)| = \infty$ beschränkt (Fall (2)) eine Polstelle von F.

Im Fall (3) heißt der Punkt z_0 wesentliche Singularität von F.

Wesentliche Singularitäten können mit Hilfe der so genannten Laurentreihen behandelt werden. Das folgende Theorem erklärt das

Satz 3.1.3 Entwicklung in einer Laurentreihe Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und f holomorph in $0 < r < |z - z_0| < R$ wobei $R > r > 0$. Dann gibt es eine Folge $(c_n)_{n=-\infty}^{\infty}$, so dass $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$. Diese Reihe heißt Laurentreihe von f. Wenn wir schreiben

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n.$$

heißt der erste Summand Hauptteil und der zweite Summand Nebenteil der Laurentreihe. Der haupt-teil ist konvergent für $|z| > r$ und der Nebenteil in $|z| < R$.

3.2 Residuum und Residuensatz Sei f eine holomorphe Funktion und z_0 eine isolierte Singularität von f. Dann f ist holomorph in $0 < |z - z_0| < R$ für ein $R > 0$. Auf Grund des Satzes 3.1.3 lässt sich f schreiben als $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$.

Definition 3.2.1: Ist f wie gerade beschrieben, so heißt der Koeffizient c_{-1} Residuum von f in z_0 man schreibt auch $c_{-1} = Res(f; z_0)$.

Satz 3.2.2 Sei f holomorph und z_0 eine Isolierte Singularität von f. Ist γ eine einfach geschlossene positive orientierte Kurne und z_0 die einzige Singularität von f innerhalb von γ so gilt

$$\int_\gamma f = 2\pi i Res(f, z_0).$$

Wenn es mehrere Singularitäten $z_1, ..., z_n$ innerhalb der Kurve gibt dann

$$\int_\gamma f = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res(f, z_k).$$

Satz 3.2.3 (a) Hat F in z_0 einen Pol von Ordnung n oder weniger, dann gilt

$$Res(F; z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left((z - z_0)^n F(z)\right)|_{z=z_0}.$$

(b) Ist $F(z) = \frac{G(z)}{H(z)}$ mit $G, H : U \to \mathbb{C}$ holomorph (U offen) $z_0 \in U$ und $H(z_0) = 0, H'(z_0) \neq 0$ dann gilt $Res(f, z_0) = \frac{G(z_0)}{H'(z_0)}$.

4 Integration über Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$

Wir werden am Anfang kurz den Begriff der Integrierbarkeit erklären.

Satz 4.1: Sei $f : R \to \mathbb{R}$ stetig, wobei $R = [a, b] \times [c, d]$ ein Rechteck ist. Dann ist f integrierbar und es gilt

$$\iint\limits_R f(x, y)\, d(x, y) = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy.$$

Satz 4.2: Ist $f : B \to \mathbb{R}$ stetig, wobei

$$B := \{(x, y) : x \in [a, b], y \in [c(x), d(x)]\}$$

und $c, d : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen sind, so ist f über B integrierbar und

$$\iint\limits_B f(x, y)\, d(x, y) = \int_a^b \Big(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy \Big)\, dx.$$

Entsprechendes gilt, wenn die Rollen von x und y vertauscht werden, dh für Mengen

$$C = \{(x, y) : y \in [c, d], x \in [a(y), b(y)]\},$$

wobei $a, b : [c, d] \to \mathbb{R}$ stetig sind. Es ist dann

$$\iint\limits_C f(x, y)\, d(x, y) = \int_c^d \Big(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\, dx \Big)\, dy.$$

Satz 4.3: Sei $B \subseteq \mathbb{R}^3$ von der folgenden Form:

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in B_0, g(x, y) \le z \le h(x, y)\},$$

wobei $g, h : B_0 \to \mathbb{R}$ stetig mit $g \le h$ und

$$B_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], u(x) \le y \le v(x)\}$$

mit $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig.

Ist dann $f : B \to \mathbb{R}$ stetig, so ist f über B integrierbar und es gilt

$$\iiint\limits_B f(x, y, z)\, d(x, y, z) = \int_a^b \Big(\int_{u(x)}^{v(x)} \Big(\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x, y, z)\, dz \Big)\, dy \Big)\, dx.$$

Bemerkung: (a) Die Rollen von x, y, z können vertauscht werden.

(b) Für $f = 1$ erhält man das <u>Volumen</u> vol(B) <u>von B</u>.

5 Transformationsformel

Satz 5.1 Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt und abgeschlossen ($n = 2$ oder $n = 3$ und B ein Integrationsbereich) und $U \supseteq B$ ein Gebiet. Sei $\Phi : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und injektiv mit $\det \Phi' \neq 0$ auf U, sowie $A := \Phi(B)$ und $f : A \to \mathbb{R}$ beschränkt. Es ist f integrierbar über A genau dann, wenn $f \circ \Phi |\det \Phi'(\cdot)|$ über B integrierbar ist. In diesem Falle gilt

$$\int_A f(x)\,dx = \int_B f(\Phi(y))|\det(\Phi'(y))|\,dy.$$

Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^2$ Für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ setze $r := \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Dann findet man Winkel φ mit $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

Für $\Phi(r, \varphi) := \binom{r\cos\varphi}{r\sin\varphi}$ gilt $\det \Phi'(r, \varphi) = r$ da $\Phi'(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$.

Damit Φ injektiv ist, nehme man etwa $U = (0, \infty) \times (\tilde\varphi_1, \tilde\varphi_2)$ mit $0 \le \tilde\varphi_1 < \tilde\varphi_2 \le 2\pi$ und $\tilde\varphi_2 - \tilde\varphi_1 < 2\pi$. Sind $\tilde\varphi_1 < \varphi_1 < \varphi_2 < \tilde\varphi_2$, $B := [R_1, R_2] \times [\varphi_1, \varphi_2]$ und $A := \Phi(B)$, so gilt für stetiges $f : A \to \mathbb{R}$:

$$\iint\limits_A f(x, y)\,d(x, y) = \iint\limits_B f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\,d(r, \varphi) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{R_1}^{R_2} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\,dr\,d\varphi.$$

Zusatz: Diese Formel gilt auch für $\varphi_1 = 0$ und $\varphi_2 = 2\pi$, sowie für $R_1 = 0$.

Zylinderkoordinaten im $\mathbb{R}^3$ Hier ist $\Phi(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$, also $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ und $z = z$. Es gilt

$$\Phi'(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

also $\det \Phi'(r, \varphi, z) = r$. Für $A, B \subseteq \mathbb{R}^3$ wie in Satz 5.1 und stetiges $f : A \to \mathbb{R}$ gilt somit:

$$\iiint\limits_A f(x, y, z)\,d(x, y, z) = \iiint\limits_B f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) r\,d(r, \varphi, z).$$

Der Zusatz aus dem Fall der Polarokoordinaten gilt sinngemäß auch hier.

Ein paar Anwendungen der Transformationsformel folgen. Wir werden immer annehmen, dass die Annahmen des Satzes gelten

Kugelkoordinaten im $\mathbb{R}^3$ Man schreibt $r = \|(x, y, z)\| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ und

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(r, \varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\sin\vartheta \\ r\sin\varphi\sin\vartheta \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix},$$

wobei $r \ge 0$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ und $\vartheta \in [0, \pi]$. Es ist

$$\Phi'(r, \varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\vartheta & -r\sin\varphi\sin\vartheta & r\cos\varphi\cos\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta & r\cos\varphi\sin\vartheta & r\sin\varphi\cos\vartheta \\ \cos\vartheta & 0 & -r\sin\vartheta \end{pmatrix},$$

also $\det \Phi'(r,\varphi,\vartheta) = -r^2 \sin\vartheta$.

Sind A und B wie in Satz 5.1, also $A = \Phi(B)$, und ist $f : A \to \mathbb{R}$ stetig, so gilt:

$$\iiint\limits_A f(x,y,z)\, d(x,y,z) = \iiint\limits_B f(r\cos\varphi\sin\vartheta, r\sin\varphi\sin\vartheta, r\cos\vartheta) r^2 \sin\vartheta\, d(r,\varphi,\vartheta).$$

Der Zusatz wie im Fall der Polarkoordinaten gilt entsprechend.

6 Jordan Maß, Jordan messbare Mengen und Fubini's Theorem

Es bezeichne für $a = (a_1,\ldots,a_n), b = (b_1,\ldots,b_n) \in \mathbb{R}^n$:$[a,b) \ := \prod_{i=1}^n \ [a_i,b_i)$ das halboffene n-dimensionale [[Hyperrechteck]] und :$J^n := \{[a,b[: a,b \in \mathbb{R}^n, a \le b\}$ die Menge aller solcher Hyperrechtecke. Zur Definition können alternativ auch halboffene Intervalle der Form $(a,b]$ verwendet werden. Weiter sei :$\mathfrak{J}^n := \{\bigcup_{k=1}^m I_k : I_1,\ldots,I_m \in J^n,\ \text{paarweise disjunkt}\}$ die Menge aller endlichen Vereinigungen von [[paarweise disjunkt]]en Hyperrechtecken.

Es bezeichne weiter μ^n den Inhalt, der für alle $a,b \in \mathbb{R}^n$ mit $a_i \le b_i$ für alle $i = 1,\ldots,n$ durch :$\mu^n([a,b)) = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j)$ und $\mu^n(\emptyset) := 0$ definiert ist.

Definition 6.1: Der innere Inhalt einer beschränkten Menge A sei :$\underline{i^n}(A) := \sup\{\mu^n(M) : M \in \mathfrak{J}^n, M \subset A\}$, ihr äußerer Inhalt sei :$\overline{i^n}(A) := \inf\{\mu^n(N) : N \in \mathfrak{J}^n, N \supset A\}$.

Definition 6.2: Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt Jordan-messbar oder quadrierbar, wenn A beschränkt ist und $\overline{i^n}(A) = \underline{i^n}(A)$.

Das Jordan-Maß einer Jordan-messbaren Menge A ist durch $i^n(A) := \overline{i^n}(A) = \underline{i^n}(A)$ gegeben.

Gilt $\overline{i^n}(A) = 0$ für ein beschränktes $A \subset \mathbb{R}^n$, so ist A Jordan-messbar und wird Jordan-[[Nullmenge]] genannt.

Satz 6.1 Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist Jordan meßbar genau dann wenn der Rand ∂A Jondan Maß Null hat.

Definition 6.3: Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine Jordan meßbare Menge und $f : K \to \mathbb{R}$ beschränkt. Sei $R = [a_1,b_1] \times ... \times [a_n,b_n]$ ein Rechteck in $\mathbb{R}^n$ mit $K \subset R$. Dann f ist integrierbar wenn die Funktion $\widetilde{f} : R \to \mathbb{R}$ mit

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), \text{ wenn } x \in K \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

integrierbar ist.

Satz 6.2 (Fubini) Seien $A \subset \mathbb{R}^m$ und $B \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossene Queder und und $f : A \times B \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Riemann integrierbare Funktion. Für $x \in A$ sei $f_x : B \to \mathbb{R}$ die Funktion definiert durch $f_x(y) = f(x,y)$ und $I_*(f,x)$, $I^*(f,x)$ das Unterintegral bzw. Oberintegral von f_x. Dann sind $I_*(f,x)$, $I^*(f,x)$ Riemann integrierbar und

$$\int_{R^m \times \mathbb{R}^n} f(x,y) d(x,y) = \int_A I_*(f,x) dx = \int_A I^*(f,x) dx.$$

7 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Wir werden anfangen mit ein paar Beispielen und mit Lösungsmethoden und Theorie dazu wird demnächst kommen.

7.1 Trennung der Variablen

Um eine Differentialgleichung der Art $y'(x) = f(x)g(y)$ zu lösen trennt man die Variablen und integriert man.

7.2 Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

Für eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung ist eine Differentialgleichhung der Art $y'(t) = f(t)y(t) + g(t)$. Oft werden wir auch schreiben $y' = f(t)y + g(t)$. Sind f,g stetige Funktionen dann hat das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = f(t)y + g(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

die Lösung

$$y(t) = exp\left(-\int_{t_0}^{t} g(s)ds\right) y_0 + e^{-G(t)} \int_{t_0}^{t} e^{G(s)}h(s)ds$$

wobei G eine Stammfunktion von g ist.

7.3 Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung

Sind Gleichungen der Art

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x).$$

Die Differentialgleichung heißt homogen wenn $g = 0$ sonst heißt sie inhomogen.

Homogene Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten Sind der Art

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_1y' + a_0y = 0,$$

wobei $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ Um Sie zu lösen betrachten wir den Ansatz $y(x) = e^{\lambda x}$ und betrachten wir die Lösungen der Gleichung $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0 = 0$. Die Vielfachheit der Lösungen muss auch berücksichtigt werden.

Inhomogene Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten Das wird in einer Formel zusammengefasst und wird in der Vorlesung erklärt werden.

8 Differentialgleichungssysteme

8.1 Lineare Systeme mit variablen Koeffizienten

Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und seien $\vec{b} : I \to \mathbb{R}^n$ und $A : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ stetig (letzteres bedeutet, dass in der Darstellung $A(t) = (a_{jk}(t))_{j,k=1}^n$ alle Funktionen $a_{jk} : I \to \mathbb{R}$ stetig sind). Ist $t_0 \in I$, so hat das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \vec{y}\,' &= A(t)\vec{y} + \vec{b}(t), \quad t \in I, \\ \vec{y}(t_0) &= \vec{y}_0 \end{aligned}$$

für jedes $\vec{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ eine eindeutige Lösung $\vec{\phi} : I \to \mathbb{R}^n$.

Der Lösungsraum

$$\mathscr{L}_0 := \{\vec{y} : I \to \mathbb{R}^n : \ \vec{y}\,' = A(t)\vec{y}, \ t \in I\}$$

des homogenen Systems ist ein reeller Vektorraum der Dimension n.

Eine Basis $\vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2, \ldots, \vec{\phi}_n$ von $\mathscr{L}_0$ heißt *Fundamentalsystem* für $\vec{y}\,' = A(t)\vec{y}$ auf I. Ist $\vec{\phi}_1, \ldots \vec{\phi}_n$ ein Fundamentalsystem, dh eine Basis von $\mathscr{L}_0$, so erhält man **jede** Lösung von $\vec{y}\,' = A(t)\vec{y}$ durch eine *Linearkombination*

$$c_1\vec{\phi}_1 + c_2\vec{\phi}_2 + \ldots + c_n\vec{\phi}_n$$

für geeignete $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$.

8.2 Die Matrixexponentialfunktion

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Für jedes $t \in \mathbb{R}$ definiert man

$$\exp(tA) := e^{tA} := \sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^l A^l}{l!}.$$

Die Reihe konvergiert dabei in dem Sinne, dass für jedes (j,k) der Eintrag der Matrix $\sum_{l=0}^{N} \frac{t^l A^l}{l!}$ an der Stelle (j,k) konvergiert.

[Zum Beweis bestimme man $C \geq 0$ so, dass $\|A\vec{x}\| \leq C\|\vec{x}\|$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ gilt (das gilt z.B. für $C = \left(\sum_{j,k=1}^n |a_{jk}|^2\right)^{1/2}$). Dann ist $\|A^l\vec{x}\| \leq C^l\|\vec{x}\|$ für alle $l \in \mathbb{N}_0$ und

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left\| \frac{t^l A^l \vec{x}}{l!} \right\| \leq \sum_{l=0}^{\infty} \frac{|t|^l C^l \|\vec{x}\|}{l!} = e^{C|t|}\|\vec{x}\| < \infty,$$

so dass die Reihe $\sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^l A^l \vec{x}}{l!}$ für jedes $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ in $\mathbb{C}^n$ absolut konvergiert.]

Eigenschaften: Seien $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

(1) Ist $AB = BA$, so gilt

$$e^{A+B} = e^A e^B.$$

Beweis wie beim Cauchyprodukt, wobei man beachtet, dass (wegen $AB = BA$!) gilt

$$(A+B)^l = \sum_{j=0}^{l} \binom{l}{j} A^j B^{l-j}, \quad l \in \mathbb{N}_0.$$

(2) Die Matrix e^A ist invertierbar mit $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

(3) Für alle $s, t \in \mathbb{R}$ gilt $e^{(s+t)A} = e^{sA}e^{tA}$.

(4) Für jedes $\vec{y}_0 \in \mathbb{C}^n$ definiert $\vec{\phi}(t) := e^{tA}\vec{y}_0$ eine Lösung des homogenen Systems $\vec{y}\,' = A\vec{y}$ mit Anfangswert $\vec{\phi}(0) = \vec{y}_0$.

8.3 Lösungsalgorithmus für Lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten

Wir betrachten das homogene System

$$\vec{y}\,' = A\vec{y}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

wobei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, und wollen ein Fundamentalsystem bestimmen.

Grundlegende Beobachtung: Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ ein *Eigenwert* von A und $\vec{v} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\vec{0}\}$ ein zugehöriger *Eigenvektor* (dh gilt $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$), so ist durch

$$\vec{\phi}(t) := e^{\lambda t}\vec{v}, \quad t \in \mathbb{R},$$

eine Lösung von (1) gegeben.

Folgerung: Gibt es eine *Basis* $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ des $\mathbb{C}^n$ aus Eigenvektoren von A mit zugehörigen Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, so ist durch

$$\vec{\phi}_j(t) := e^{\lambda_j t}\vec{v}_j, \quad t \in \mathbb{R},\ j = 1, 2, \ldots, n,$$

ein Fundamentalsystem $\vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2, \ldots, \vec{\phi}_n$ von (1) gegeben.

Wir betrachten weiter das homogene System

$$\vec{y}\,' = A\vec{y}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{H}$$

wobei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ nicht diagonalisierbar ist.

Man führe das folgende Verfahren für jeden Eigenwert von A durch:

> Sei $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A mit algebraischer Vielfachheit m (dh λ_0 ist m-fache Nullstelle aber nicht $m+1$-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$).
>
> Man bestimme eine Basis $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$ des *Hauptraumes* von A zum Eigenwert λ_0, dh eine Basis von Kern $(A - \lambda_0 I)^m$ (selbst wenn der Eigenraum Kern $(A - \lambda I)$ von A zum Eigenwert λ eine Dimension $< m$ hat, hat der entsprechende Hauptraum immer die Dimension m). Dazu bestimme man zunächst eine Basis von Kern $(A - \lambda_0 I)$, erweitere diese zu einer Basis von Kern $(A - \lambda_0 I)^2$ usw. Zweckmäßigerweise bestimmt man dabei in jedem Schritt Vektoren $\vec{w}$ mit
>
> $$(A - \lambda_0 I)\vec{w} = \vec{v},$$
>
> wobei $\vec{v}$ aus dem Spann der bisher gefundenen Vektoren ist (und $\vec{v} = 0$ im ersten Schritt).

Dann sind $\vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2, \ldots, \vec{\phi}_m$, gegeben durch

$$\vec{\phi}_j(t) = e^{\lambda_0 t}\Big(\vec{v}_j + t(A-\lambda_0 I)\vec{v}_j + \frac{t^2}{2!}(A-\lambda_0 I)^2\vec{v}_j + \ldots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}(A-\lambda_0 I)^{m-1}\vec{v}_j\Big)$$

für $j = 1, 2, \ldots, m$, linear unabhängige Lösungen von (H).

Falls $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist, beachte man folgendes:

Ist in der obigen Situation $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, so bestimmt man eine reelle Basis $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m \in \mathbb{R}^n$ des Hauptraumes und erhält so reellwertige Funktionen $\vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2, \ldots, \vec{\phi}_m$.

Ist $\lambda_0 \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, so ist auch $\overline{\lambda_0}$ ein Eigenwert der algebraischen Vielfachheit m. In diesem Fall erhält man $2m$ linear unabhängige reellwertige Lösungen von (H) durch

$$\operatorname{Re}\vec{\phi}_1,\ \operatorname{Re}\vec{\phi}_2, \ldots,\ \operatorname{Re}\vec{\phi}_m,\ \operatorname{Im}\vec{\phi}_1,\ \operatorname{Im}\vec{\phi}_2, \ldots,\ \operatorname{Im}\vec{\phi}_m.$$

Der Eigenwert $\overline{\lambda_0}$ wird in dem Verfahren dann nicht mehr berücksichtigt!

8.4 Variation der Konstanten

Ist $\Phi(t)$ ein Fundamentalsystem für $\vec{y}\,'(t) = A\vec{y}\,(t)$ auf I, so macht man für eine Lösung $\vec{y}\,'(t) = A\vec{y}\,(t) + \vec{b}\,(t)$ von den Ansatz

$$\vec{y}(t) = \Phi(t)\vec{c}(t), \quad t \in I,$$

und erhält

$$A(t)\Phi(t)\vec{c}(t) + \vec{b}(t) \stackrel{!}{=} \vec{y}\,'(t) = A(t)\Phi(t)\vec{c}(t) + \Phi(t)\vec{c}\,'(t),$$

also

$$\Phi(t)\vec{c}\,'(t) = \vec{b}(t) \quad \text{bzw.} \quad \vec{c}\,'(t) = \Phi(t)^{-1}\vec{b}(t).$$

Die eindeutige Lösung von

$$\begin{aligned} \vec{y}\,' &= A(t)\vec{y} + \vec{b}(t), \quad t \in I, \\ \vec{y}(t_0) &= \vec{y}_0 \end{aligned}$$

ist dann gegeben durch

$$\vec{y}(t) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}\vec{y}_0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi(\tau)^{-1}\vec{b}(\tau)\,d\tau, \quad t \in I.$$

8.5 Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf

Sei $D \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ offen, $F : D \to \mathbb{R}^n$ stetig, sowie $(x_0, \vec{y}_0) \in D$. Sei F bzgl. der Variablen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ in D stetig partiell differenzierbar. Dann ist das Anfangswertproblem

$$\left.\begin{aligned} \vec{y}\,' &= F(x, \vec{y}) \\ \vec{y}(x_0) &= \vec{y}_0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(AWP)}$$

eindeutig lösbar, dh

(i) Es gibt eine Lösung $\vec{y} : I \to \mathbb{R}^n$ von (AWP), wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ offen ist.
(ii) Sind $\vec{y} : I_1 \to \mathbb{R}^n$, $\vec{z} : I_2 \to \mathbb{R}^n$ Lösungen von (AWP), so stimmen $\vec{y}$ und $\vec{z}$ auf $I_1 \cap I_2$ überein.