Institut für Analysis
Dr. Ioannis Anapolitanos
Markus Lange

SoSe 2018
19.04.2018

Analysis für das Lehramt

Aufgabenzettel 1

Aufgabe 1:
Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen und $F : G \to \mathbb{C}$ eine (komplex) differenzierbare Funktion in $z_0 = x_0 + iy_0$. Desweiteren sei

$$g(x,y) = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

eine Darstellung von F. Zeigen Sie, dass

a) g (reell) differenzierbar in (x_0, y_0) ist.

b) aus der (reellen) Differenzierbarkeit von g in (x_0, y_0) nicht die (komplexe) Differenzierbarkeit von F in z_0 folgt.

Aufgabe 2:
Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in G$ und $F : G \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Zeigen Sie, dass F komplex differenzierbar in z_0 ist genau dann, wenn eine Konstante $a \in \mathbb{C}$ und eine Funktion $H : G \to \mathbb{C}$ mit $H(z_0) = 0$ und H stetig in z_0 existieren, so dass

$$F(z) = F(z_0) + a(z - z_0) + H(z)(z - z_0), \quad z \in U_{z_0} \subset G.$$

Aufgabe 3:
Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist $F(z)$ komplex differenzierbar? Bestimmen Sie gegebenfalls $F'(z)$.

a) $F(z) \equiv c = const$ **b)** $F(z) = z$ **c)** $F(z) = \dfrac{1}{z}, z \neq 0$

d) $F(z) = \dfrac{z^3}{z^3 + z^2 - 2}$ **e)** $F(z) = \operatorname{Im} z$ **f)** $F(z) = \overline{z}$

g) $F(z) = \sqrt{|\operatorname{Re} z - \operatorname{Im} z|}$ **h)** $F(z) = z^2 \overline{z}$

Aufgabe 4:
Sei $F(z)$ eine in der Kreisschreibe $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ komplex differenzierbare Funktion, für die gilt:

a) $\operatorname{Re} F \equiv 1$,

b) $|F| \equiv 1$.

Zeigen Sie, dass daraus folgt: $F \equiv \text{const}$.