Institut für Analysis
Dr. Ioannis Anapolitanos
Markus Lange

SoSe 2018
26.04.2018

Analysis für das Lehramt

Aufgabenzettel 2

Aufgabe 1:
Bestimmen Sie alle Funktionen $v(x, y)$, so dass $F(z) = F(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ eine in $\mathbb{C}$ komplex differenzierbare Funktion wird, wobei

$$u(x, y) = x^2 - y^2 + e^{-y} \sin x - e^y \cos x$$

gegeben ist. Geben Sie $F(z)$ an.

Aufgabe 2: (Beweis von Bemerkung 2.1.1)
Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen, $F : G \to \mathbb{C}$ holomorph und $\gamma : [a, b] \to G$ differenzierbar. Zeigen Sie, dass $F \circ \gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ differenzierbar ist und dass

$$(F \dot{\circ} \gamma)(t) = F'(\gamma(t))\, \dot{\gamma}(t)\,, \qquad \text{für } t \in [a, b]\,.$$

Definition: (orientierungserhaltende Parametertransformation)
Ist $\varphi : I \to J$ eine stetig differenzierbare Abbildung zwischen zwei abgeschlossenen Intervallen $I := [a, b]$, $J := [c, d]$ mit $\varphi'(t) > 0$ für alle $t \in I$ sowie $\varphi(a) = c$ und $\varphi(b) = d$, dann nennt man φ eine orientierungserhaltende Parametertransformation.

Aufgabe 3:
Zeigen Sie, dass das Kurvenintegral (Definition 2.1.2.) invariant unter orientierungserhaltenden Umparametrisierungen (siehe Definition oben) ist.

Aufgabe 4: Berechnen Sie für die gegebenen Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und Kurven γ das Kurvenintegral

$$\int_\gamma f(z)\, dz\,.$$

a) $f(z) = \overline{z}z^2$, $\gamma : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{C}\,;\, t \mapsto e^{i(\pi - t)}$,

b) $f(z) = \overline{z}z^2$, γ parametrisiere die Verbindungsstrecke von -1 nach i,

c) $f(z) = |z|^2$, γ parametrisiere den Rand von $\{z \in \mathbb{C} |\, \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z \in (0, 1)\}$, wobei γ so gewählt sei, dass der Rand gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen wird.

Aufgabe 5:
Berechnen Sie den Wert der zwei reellen Integrale

$$\int_0^{2\pi} e^{-\sin t} \cos(t + \cos t)\, dt \qquad \text{und} \qquad \int_0^{2\pi} e^{-\sin t} \sin(t + \cos t)\, dt$$

indem Sie eine geeignete komplexe Funktion entlang des Einheitskreises integrieren.