Institut für Analysis
Dr. Ioannis Anapolitanos
Markus Lange

SoSe 2018
03.05.2018

Analysis für das Lehramt

Aufgabenzettel 3

Aufgabe 1:

Aufgabe 2:

Es sei $R > 0$. Die Wege $\gamma_j \colon [0,R] \to \mathbb{C}, j = 1,2,3$ seien definiert durch

$$\gamma_1(t) := t, \quad \gamma_2(t) := R + it, \quad \gamma_3(t) := t(1+i), \text{ für alle } t \in [0,R].$$

a) Beweisen Sie die Gleichung $\int_{\gamma_3} e^{-z^2} dz = \int_{\gamma_1} e^{-z^2} dz + \int_{\gamma_2} e^{-z^2} dz$.

b) Zeigen Sie mittels geeigneter Abschätzungen $\int_{\gamma_2} e^{-z^2} dz \to 0$ für $R \to \infty$.

c) Berechnen Sie nun den Wert der sogenannten *Fresnelschen Integrale*

$$\int_0^\infty \sin(x^2) dx \quad \text{und} \quad \int_0^\infty \cos(x^2) dx,$$

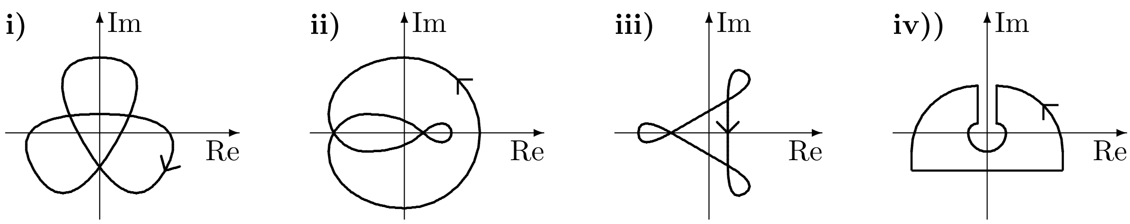
indem Sie den Grenzübergang $R \to \infty$ betrachten.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ benutzen.

Aufgabe 3:

a) Zeigen Sie, daß durch $\alpha(t) := R(t)e^{it}$, wobei $R : [0, 2\pi] \to (0, \infty)$ eine stetige und stückweise stetig differenzierbare Funktion mit $R(0) = R(2\pi)$ sei, eine einfach geschlossene Kurve $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ gegeben ist.
Zeigen Sie des weiteren, daß dann $\int_\alpha \frac{1}{z} dz = 2\pi i$ gilt.

b) Berechnen Sie jeweils das Kurvenintegral $\int_\alpha \frac{1}{z} dz$ für die skizzierte geschlossene, stückweise differenzierbare Kurve α.



— Bitte wenden! —

Aufgabe 4:

a) Seien $a, b > 0$ und $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = e^{-z^2}$. Zeigen Sie, dass bei festem b die Wegintegrale von f über die vertikalen Seiten des Rechtecks mit den Ecken $\pm a, \pm a + ib$ für $a \to \infty$ gegen 0 konvergieren, und folgern Sie mit dem Cauchyschen Integralsatz:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos(2bx) dx = \sqrt{\pi} e^{-b^2}.$$

b) Seien $a, b \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ mit $|a| < r < |b|$ und $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}\,;\, t \mapsto re^{it}$. Berechnen Sie

i) $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z-a}\, dz\,,$ **ii)** $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z-b}\, dz\,,$ **iii)** $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{(z-a)(z-b)}\, dz\,.$