Institut für Analysis
Dr. Ioannis Anapolitanos
Markus Lange

SoSe 2018
09.05.2018

Analysis für das Lehramt

Aufgabenzettel 4

Definition: (ganze Funktion)
Eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt **ganz**. Die Menge der ganzen Funktion bezeichnen wir mit $H(\mathbb{C})$.

Aufgabe 1:

a) Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion. Zeigen Sie, dass die Reihe

$$F(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z)}{n!}$$

auf $\mathbb{C}$ lokal gleichmäßig konvergiert. Wie lässt sich F durch f ausdrücken?

b) Es sei $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph mit $|f(z)| \le \frac{1}{1-|z|}$ für alle $z \in D$. Zeigen Sie, dass für die Potenzreihendarstellung $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $z \in D$ von f gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \,:\, |a_n| < (n+1)e\,.$$

Aufgabe 2:

a) Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion, die nicht konstant ist. Beweisen Sie, dass es zu jedem $a \in \mathbb{C}$ eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{C}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ gibt mit $f(z_n) \to a$ für $n \to \infty$.

b) Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion mit $f(z) \notin \mathbb{R}$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass f konstant ist.

c) Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion. Zeigen Sei die folgende Verallgemeinerung des Satzes von Liouville:
Die Funktion f ist genau dann eine Polynomfunktion mit Grad $\le n$, wenn positive Konstanten a und b existieren mit

$$|f(z)| \le a + b|z|^n \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C}\,.$$

Hinweis: Schätzen Sie in der Potenzreihenentwicklung von f um 0 die Koeffizienten a_m für $m > n$ geeigent ab.

— **Bitte wenden!** —

Aufgabe 3:
Sei $\mathbb{D} := K(0,1)$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

a) Sei $f \in H(\mathbb{D})$ und es gebe ein $C > 0$ mit $|\frac{f(z)}{z}| \leq \frac{C}{\sqrt{|z|}}$ für alle $z \in \mathbb{D}$. Dann besitzt die Funktion $g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}\,;\ z \mapsto \frac{f(z)}{z}$ eine in 0 hebbare Singularität.

b) Seien $f,\, g \in H(\mathbb{C})$ mit $|f(z)| \leq |g(z)|$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Dann existiert ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $f = \lambda g$.

Aufgabe 4:
Bestimmen Sie jeweils Art und Lage sämtlicher isolierter Singularitäten der gegebenen Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

a) $f(z) := \dfrac{z}{z^2 - z - 12}\,,$ **b)** $f(z) := \dfrac{1}{\sin(1/z)}\,,$

c) $f(z) := \dfrac{\sin(z) - z}{z^3}\,,$ **d)** $f(z) := \dfrac{e^{1/z}}{(z-1)^2}\,.$