Institut für Analysis
Dr. Ioannis Anapolitanos
Markus Lange

SoSe 2018
28.05.2018

Analysis für das Lehramt

Aufgabenzettel 5

Definition: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < \infty$. Die Fouriertransformierte einer solchen Funktion f ist wie folgt definiert:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(x)\, dx\,.$$

Aufgabe 1:
Zeigen Sie, dass die Fouriertransformierte einer Gauss-Funktion wieder eine Gaussfunktionen ist. Benutzen Sie dafür den Cauchyschen Integralsatz.

Aufgabe 2:
Berechnen Sie den Wert der folgenden Wegintegrale.

a) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2+2z}\, dz\,,$ **b)** $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{z^3}{z^2+1}\, dz\,,$

c) $\displaystyle\int_{|z|=4} \frac{ze^{iz}}{(z-\pi)^3}\, dz\,,$ **d)** $\displaystyle\int_{|z-2|=3} \frac{e^{i\cos z}\sin(z^4+1)-z}{(z-7)^{42}}\, dz\,.$

Der Integrationsweg soll dabei jeweils die positiv orientierte Kreislinie sein.

Aufgabe 3:
Die Funktion F ist gegeben durch

$$F(z) = \frac{1}{1-z^2} + \frac{1}{3-z}\,.$$

Bestimmen Sie die Laurententwicklung von F

1) im Kreisring $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 3\}$.

2) um den Entwicklungspunkt $z_0 = 1$, die im Punkt $1 + 3i$ konvergiert.