Institut für Analysis
Dr. Ioannis Anapolitanos
Markus Lange

SoSe 2018
30.05.2018

Analysis für das Lehramt

Aufgabenzettel 6

Aufgabe 1:
Entwickeln Sie $F(z) = \frac{1+i}{z^2-z-iz+i}$ in eine Laurentreihe um den Entwicklungspunkt $z_0 = 0$, welche auf $G = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ konvergiert.

Aufgabe 2:
Bestimmen Sie die isolierten Singularitäten von F sowie die Residuen in diesen Punkten.

a) $F(z) = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$, **b)** $F(z) = \frac{ze^{az}}{(z-1)^2}$ $(a \in \mathbb{C} \text{ fest})$,

Aufgabe 3:
Berechnen Sie folgende Kurvenintegrale mit Hilfe des Residuensatzes.

a) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}\, dz$, **b)** $\displaystyle\int_{|z|=9} \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}\, dz$,

c) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{z}{e^{iz}-1}\, dz$.

Der Integrationsweg soll dabei jeweils die positiv orientierte Kreislinie sein.

Aufgabe 4:
Berechnen Sie die folgenden Integrale unter Verwendung des Residuensatzes.

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{8-4x+x^2}\, dx$, **b)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-1}{x^4+2x^2+1}\, dx$, **c)** $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-2a\cos t+a^2}\, dt$, $|a| < 1$.

— **Bitte wenden!** —

Zusatzaufgabe:
Sei $f \in H(\mathbb{C})$ mit $f(0) = f'(0) = 0$. Es gelte $|e^{f(z)}| \leq e^{|z|}$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass $f \equiv 0$ ist.
Hinweis: Zeigen Sie $|f(z)| \leq |2r - f(z)|$ für alle $r > 0$ und $z \in \overline{K(0,r)}$. Betrachten Sie dann $h_r(z) := \frac{r^2 f(z)}{z^2(2r - f(z))}$ für $|z| < 2r$ und verwenden Sie das Maximumsprinzip.

Das Maximumprinzip:
Sei $\Omega \in \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in H(\Omega)$. Dann gilt:

1) Hat $|f|$ in Ω ein lokales Maximum, so ist f konstant.

2) Ist $f(z) \neq 0$ für alle $z \in \Omega$ und hat $|f|$ ein lokales Minimum in Ω, so ist f konstant.

3) Ist Ω beschränkt und $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ stetig und holomorph in Ω, so gilt

$$\max_{z \in \overline{\Omega}} |f(z)| = \max_{z \in \partial\Omega} |f(z)| \,.$$

Hinweis: Hierbei bezeichnet $\partial\Omega$ den Rand des Gebietes Ω.