

## Analysis für das Lehramt

### Aufgabenzettel 8

#### Aufgabe 1:

Sei  $A \subset \mathbb{R}^2$  der beschränkte Bereich, der von den Kurven  $y = x^2$ ,  $y = 2x^2$ ,  $y = \frac{\pi}{4x}$  und  $y = \frac{\pi}{2x}$  eingeschlossen wird. Bestimmen Sie das Integral

$$\iint_A \frac{3y^2}{x} \cos\left(\frac{y^2}{x}\right) dx dy.$$

#### Aufgabe 2:

a) Sei  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y)\|_2 \in [1, 8], |y| \leq x\}$ . Berechnen Sie das Integral  $\iint_B \frac{y}{x} d(x, y)$ .

b) Berechnen Sie,  $\iint_B (x + y)^2 e^{x-y} d(x, y)$  wobei  $B$  das Quadrat mit den Eckpunkten  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 2)$  und  $(2, 1)$  ist.

c) Berechnen Sie für die Menge  $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 \leq (1 - z)^2\}$  das Integral

$$\iiint_B (x^2 + y^2)^2 e^{2(1-z)^7} d(x, y, z).$$

d) Sei  $B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \|(x, y, z)\|_2 \leq 2\}$ . Eine kugelförmige Gasansammlung besitze die Massendichte

$$\rho(x, y, z) = \begin{cases} \frac{1}{1 + x^2 + y^2 + z^2} & \text{für } 0 \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq 1, \\ 0 & \text{für } 1 < \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq 2. \end{cases}$$

Berechnen Sie die gesamte Masse

$$\iiint_B \rho(x, y, z) d(x, y, z).$$