

## Analysis für das Lehramt

### Aufgabenzettel 9

#### Aufgabe 1:

Gegeben sei ein Körper  $K$  mit der Massendichte  $\rho(x, y, z)$ . Dann sind seine Masse  $m$  und seine Schwerpunktkoordinaten  $S = (S_x, S_y, S_z)$  gegeben durch

$$m = \iiint_K \rho(x, y, z) d(x, y, z),$$

und

$$S_x = \frac{1}{m} \iiint_K x \rho(x, y, z) d(x, y, z),$$

$$S_y = \frac{1}{m} \iiint_K y \rho(x, y, z) d(x, y, z),$$

$$S_z = \frac{1}{m} \iiint_K z \rho(x, y, z) d(x, y, z).$$

Berechnen Sie den Schwerpunkt der Halbkugel  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R, z \geq 0\}$  bei homogener Massenverteilung  $\rho(x, y, z) = \rho_0$ .

#### Aufgabe 2:

Sei  $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  wie folgt definiert:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{y^2}, & 0 < x < y \leq 1, \\ -\frac{1}{x^2}, & 0 < y < x \leq 1, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass der Satz 4.1 (bzw. Satz 6.2) aus der Vorlesung nicht gilt und begründen Sie warum.

#### Aufgabe 3:

- Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$  abzählbar und beschränkt. Zeigen Sie, dass  $A$  entweder nicht Jordan messbar ist, oder Jordan-Maß Null hat.
- Geben Sie eine unendliche Menge mit Jordan-Maß Null an.

#### Aufgabe 4:

Berechnen Sie das Jordan-Maß der Menge

$$B = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, y \geq 0, \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}} \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2} \right\}.$$