# Analysis auf Mannigfaltigkeiten

1. Übungsblatt

-keine Abgabe-

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am 22.04.2013 besprochen.

**Aufgabe 1**
Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und eine $r$-mal stetig differenzierbare Kurve

$$\alpha\colon I \to \mathbb{R}^2, \qquad \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)).$$

Ferner gelte $\alpha'(t) \neq (0,0)$ für alle $t \in I$. Wir betrachten nun die Rotationsfläche $R$, die beim rotieren um die $z$-Achse entsteht. Diese hat die Parameterdarstellung

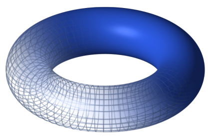
$$F\colon I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \qquad (t,\phi) \to (\alpha_1(t)\cos\phi, \alpha_1(t)\sin\phi, \alpha_2(t))^T.$$

Zeige, dass $R$ eine zweidimensionale $C^r$-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist, falls $\alpha_1(t) \neq 0,\ t \in I$ gilt.

**Aufgabe 2**
Wir betrachten als Anwendung der ersten Aufgabe den Rotationstorus $T \subseteq \mathbb{R}^3$, welcher wie folgt parametrisiert ist:

$$T = \Big\{ \begin{pmatrix} (r_1 + r_2\cos\phi)\cos\psi \\ (r_1 + r_2\cos\phi)\sin\psi \\ r_2\sin\phi \end{pmatrix} \mid 0 < r_2 < r_1,\ 0 \leq \phi, \psi \leq 2\pi \Big\}.$$

Zeige, dass $T$ eine zweidimensionale $C^\infty$-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist und bestimme zu jedem Punkt den Tangentialraum.



**Aufgabe 3**
Seien $M_1, M_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ zwei $m$-dimensionale $C^r$-Untermannigfaltigkeiten. Sind $M_1 \cup M_2$ und $M_1 \cap M_2$ ebenfalls Untermannigfaltigkeiten? Was passiert bei verschiedenen Dimensionen/Differenzierbarkeitsstufen?

**Aufgabe 4**
Sei $g\colon (-\pi/2, 3\pi/2) \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $g(p) = (2\cos p, \sin(2p))$. Zeige, dass

$$M = g((-\pi/2, 3\pi/2)) \subseteq \mathbb{R}^2$$

keine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$ ist.

**Aufgabe 5**
Seien $p_1, \ldots, p_k \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ reelle Polynome. Ist

$$V = \{(x_1, \ldots, x_n)^T \mid p_i(x_1, \ldots, x_n) = 0 \text{ für alle } i \in \{1, \ldots, k\}\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$?

**Aufgabe 6**
Für welche $c \in \mathbb{R}$ ist die Menge

$$H_c = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + c\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$?