Analysis auf Mannigfaltigkeiten

2. Übungsblatt

-keine Abgabe-

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am 03.05.2013 besprochen.

Aufgabe 1
Sei $S\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ eine injektive, lineare Abbildung und λ^m das m-dimensionale Lebesgue-Maß. Zeige:

1. Es gibt genau ein Maß μ auf Bild(S) mit $\mu(E) = \lambda^m(T^{-1}(E))$ für jede Isometrie $T\colon \mathbb{R}^m \to$ Bild(S).
2. Zeige, dass die Flächenformel in diesem Fall den richtigen Wert liefert, also

$$A_E(S) = \mu(S(E)).$$

Aufgabe 2
Bestimme den Tangentialraum an $M = SO(n)$ in $p = E_n$. Wie sieht es im Fall $M = GL(n)$ bzw. $M = SL(n)$ aus?

Aufgabe 3
Sei $\Phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\Phi(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 1-x^2-y^2 \end{pmatrix}, \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

Zeige, dass $\Phi\colon \mathbb{R}^2 \to S^2 \setminus \{(0,0,-1)\}$ bijektiv ist und bestimme die Umkehrabbildung.

Ist Φ eine Immersion?

Aufgabe 4
Bestimme die Tangentialräume aus Aufgabe 2, Übungsblatt 1.

Aufgabe 5
Finde ein Beispiel für eine Immersion, die nicht injektiv ist.

Aufgabe 6
Zurück zu Aufgabe 5, Übungsblatt 1. Man zeige, dass ohne Einschränkung nur der Fall $k = 1$ betrachtet werden kann und das V im Allgemeinen keine Untermannigfaltigkeit ist (mindestens 3 grundlegend verschiedene Beispieltypen).

Es gilt jedoch Folgendes: Ist V irreduzibel und regulär und mindestens eindimensional, so ist V eine Untermannigfaltigkeit.