# Analysis auf Mannigfaltigkeiten

4. Übungsblatt

-keine Abgabe-

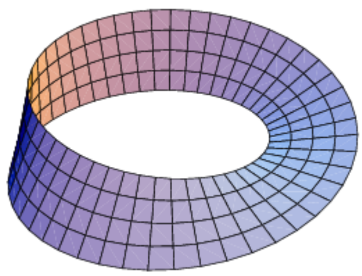
Dieses Übungsblatt wird in der Übung am 17.05.2013 besprochen.

**Aufgabe 1**
Zeige: Eine Orientierung auf einer Mannigfaltigkeit induziert eine Orientierung der Tangentialräume $T_pM$. Zeige weiter, dass zwei nicht gleich orientierte Karten an mindestens einem Punkt $p \in M$ verschiedene Orientierungen auf $T_pM$ induzieren.

**Aufgabe 2**
Betrachte die Abbildung $\Psi\colon \mathbb{R} \times (-1/2, 1/2) \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\Psi(s,t) = \begin{pmatrix} \cos(s) \\ \sin(s) \\ 0 \end{pmatrix} + t\Big( \cos(s/2) \begin{pmatrix} \cos(s) \\ \sin(s) \\ 0 \end{pmatrix} + \sin(s/2) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Big).$$

Zeige, dass das Möbiusband $M = \mathrm{Bild}(\Psi)$ eine nicht orientierbare Hyperfläche des $\mathbb{R}^3$ ist.



**Aufgabe 3**
Zeige: Existiert auf einer Untermannigfaltigkeit $M$ eine Orientierung, so existiert auch eine zweite, dazu entgegengesetzte Orientierung. Können mehr als zwei Orientierungen existieren?

**Aufgabe 4**
Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Kurve mit $\dot{\gamma} \neq 0$. Weiter sei $\gamma\colon I \to \gamma(I)$ ein Homöomorphismus. Zeige, dass $\gamma(I)$ eine orientierbare Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ ist. Sind alle eindimensionalen Untermannigfaltigkeiten orientierbar?

**Aufgabe 5**
Zeige: Kann eine Untermannigfaltigkeit M durch zwei Karten $\phi_1\colon U_1 \to V_1 \subseteq M$ und $\phi_2\colon U_2 \to V_2 \subseteq M$ so überdeckt werden, dass $V_1 \cap V_2$ zusammenhängend ist, so ist M orientierbar.