Analysis auf Mannigfaltigkeiten

5. Übungsblatt

-keine Abgabe-

Dieses Übungsblatt wird nicht besprochen.

Aufgabe 1
Schreibe auf ein leeres Blatt Papier die Aussagen folgender Definitionen bzw. Sätze auf (bei Sätzen inklusive Voraussetzungen). Vergleiche mit dem Vorlesungsmitschrieb. Finde bei Begriffen oder Voraussetzungen, welche vergessen wurden, heraus wozu diese wichtig sind. (In etwa: Wozu ist diese Voraussetzung wichtig? Es gibt ein Beispiel das zeigt, dass der Satz ohne Voraussetzung falsch ist etc.)
Diese Methode ist vor jeder mündlichen/schriftlichen Prüfung zu empfehlen. Die Begriffe:

m-dimensionale C^α-Untermannigfaltigkeit, äquivalente Charakterisierungen einer Untermannigfaltigkeit, Immersion, Tangentialraum, Charakterisierung des Tangentialraumes, induzierte Metrik (einer Immersion), Definition+Konstruktionsidee des Integrals für Funktionen $f\colon M \to \overline{R}$, Orientierung von Basen und Karten, Definition Orientierung für Mannigfaltigkeiten, Orientierbarkeit von Hyperflächen.

Aufgabe 2
Zeige, dass jede zusammenhänge, eindimensionale Mannigfaltigkeit diffeomorph zu $(0,1)$ (nichtkompakter Fall) oder zu S^1 ist (kompakter Fall).

Eine Lösung dieser Aufgabe findet sich zum Beispiel in
Berger, Gostiaux: Differential geometry : manifolds, curves, and surfaces (Paragraph 3.4).

Aufgabe 3
Sei $g\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ linear und $f \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. Zeige: $D(f \circ g) = Df \circ g$.

Benutze dazu einfach die Definition der Ableitung, sprich es exisitert eine lineare Abbildung...

Aufgabe 4
Wer jetzt immer noch nicht genug hat, kann sich überlegen, dass die Normalenräume zum Möbiusband so gegeben sind, wie in der Übung behauptet. Außerdem kann gezeigt werden, dass das Möbiusband überhaupt eine Mannigfaltigkeit ist, sprich der Rang der Ableitung der Parametrisierung überall zwei ist.