Analysis auf Mannigfaltigkeiten

6. Übungsblatt

-keine Abgabe-

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am 31.05.2013 besprochen.

Wir definieren für $M \subseteq \mathbb{R}^n$ die Menge $\partial_{Mf}(M)$ durch

$$\partial_{Mf}(M) = \overline{M} \setminus M.$$

Aufgabe 1
Man erinnere sich an den Begriff der Teilraumtopologie und zeige für Mannigfaltigkeiten $\partial_{Mf}(M) = \partial_{\overline{M}}(M)$. Die rechte Seite steht für den Rand von M in der $\overline{M}$-Topologie.
Gilt die Aussage auch falls M keine Mannigfaltigkeit ist?

Aufgabe 2
Sei M eine Mannigfaltigkeit so, dass $\overline{M}$ eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand ist, also für jedes $x \in \overline{M}$ eine der folgenden Alternativen gilt:

- Es existieren offene Mengen $x \in U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^n$ und ein Diffeomorphismus $h\colon U \to V$ mit
$$h(U \cap \overline{M}) = V \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\}).$$
- Es existieren offene Mengen $x \in U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^n$ und ein Diffeomorphismus $h\colon U \to V$ mit
$$h(U \cap \overline{M}) = V \cap \{x \mid x_m \geq 0,\ x_{m+1} = \ldots = x_n = 0\}.$$
sowie $h_m(x) = 0$.

Diese beiden Alternativen schließen sich gegenseitig aus. Die Menge der Punkte, für welche die zweite Bedingung gilt, heißt der Rand von $\overline{M}$. Zeige das dieser eine Teilmenge von $\partial_{Mf}(M)$ ist. Gilt Gleichheit?

Aufgabe 3
Zeige: Für $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist $\partial_{Mf}(M)$ im Allgemeinen nicht abgeschlossen. Ist jedoch M eine Untermannigfaltigkeit, so ist $\partial_{Mf}(M)$ abgeschlossen. Es gilt also

$$\partial_{Mf}(\partial_{Mf}(M)) = \emptyset.$$

Aufgabe 4
Sei $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2 < r,\ x_{k+1} = x_{k+2} = \ldots = x_n = 0\}$ eine eingebettete Kugel. Bestimme $\partial_{Mf}(M)$. Was ist $\partial(M)$?

Aufgabe 5
Sei $M \subseteq \mathbb{R}^3$ das Möbiusband aus Übungsblatt 4. Bestimme $\partial_{Mf}(M)$ und $\partial(M)$.
Betrachte anschließend auch den Torus T aus Übungsblatt 1.

Aufgabe 6
Sei M eine beschränkte Mannigfaltigkeit, welche durch eine Karte $\phi\colon U \to M$ parametrisiert werden kann. Dabei sei U beschränkt und ϕ gleichmäßig stetig.
Zeige oder widerlege:
Es gibt genau eine stetige Fortsetzung $\overline{\phi}\colon \overline{U} \to \overline{M}$ von ϕ und es gilt $\partial_{Mf}(M) = \overline{\phi}(\partial(U))$.
Was passiert, wenn man auf eine der Voraussetzungen verzichtet?