Analysis auf Mannigfaltigkeiten

7. Übungsblatt

-keine Abgabe-

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am 10.06.2013 besprochen.

Aufgabe 1
Sei $M \subseteq \mathbb{R}^3$ eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit, $\Omega \subseteq M$ eine zusammenhängende Teilmenge mit glattem Rand und A ein orientierter Atlas aus rand-adaptierten Karten.
Zeige, dass die Kurven $s \mapsto \Phi(0,s)$ mit $\Phi \in A$ den Rand $\partial\Omega$ parametrisieren und orientieren.
An $p \in \partial\Omega$ ist eine Tangente gegeben durch

$$t(p) = (\partial_2\Phi)(\Phi^{-1}(p)).$$

Eine Normale ist gegeben durch

$$\nu(p) = \frac{\partial_1\Phi \times \partial_2\Phi}{|\partial_1\Phi \times \partial_2\Phi|}.$$

Zeige, dass die rechte-Hand-Regel gilt, also $\nu \times t$ in Richtung Ω zeigt.

Aufgabe 2
Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit glattem Rand. Zeige:

$$\mathrm{Vol}(A) = \frac{1}{n}\int\limits_{\partial A} x \cdot \nu(x)\, dS(x).$$

Aufgabe 3
Führe den Beweis des Existenzsatz der Zerlegung der Eins aus der Vorlesung zu Ende. Konkret:
Für $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, $(U_j)_{j=1,\dots,N}$ offene Überdeckung von K, gibt es Funktion $\phi_j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ mit

- $\mathrm{supp}(\phi_j) \subseteq U_j$
- $0 \leq \phi_j \leq 1$
- $\sum\limits_{j=1}^{N} \phi_j(x) = 1$ für alle $x \in K$

Aufgabe 4
Sei $Z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1\}$. Weiter sei $f(x,y,z) = (x^3, x^2y, x^2z)^T$. Berechne auf zwei verschiedene Arten das Oberflächenintegral

$$\int\limits_{\partial Z} f \cdot \nu\, dS.$$

Aufgabe 5
Es sei $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq B(0,1/k)$ eine Folge von nichtleeren Teilmengen mit glattem Rand im $\mathbb{R}^n$. Weiter sei $0 \in U$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Zeige:

$$(\mathrm{div}\, f)(0) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\mathrm{Vol}(A_k)} \int\limits_{\partial A_k} f \cdot \nu\, dS.$$

Aufgabe 6
Sei $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ mit $\psi(x) = 1$ für $|x| \leq 1$, $\psi(x) \in [0,1]$ für $1 < |x| < 2$ und $\psi(x) = 0$ für $|x| \geq 2$. Für $j \in \mathbb{Z}$ definieren wir

$$\phi_j(x) = \psi(2^{-j-1}x) - \psi(2^{-j}x).$$

Bilden die $(\phi_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ eine Zerlegung der Eins?