Analysis auf Mannigfaltigkeiten

8. Übungsblatt

-keine Abgabe-

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am 24.06.2013 besprochen.

Auf diesem Übungsblatt geht es um den Satz von Stokes. Aufgaben 1 und 2 sind lediglich Vorbereitung für Aufgabe 3.

Aufgabe 1
Zeige: Für $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $x, y \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$(Ax)\cdot y - (Ay)\cdot x = \begin{pmatrix} a_{32} - a_{23} \\ a_{13} - a_{31} \\ a_{21} - a_{12} \end{pmatrix} \cdot (x \times y)$$

Aufgabe 2
In der Situation von Übungsblatt 7, Aufgabe 1 sei $u \in C^1(V, \mathbb{R}^2)$ definiert durch

$$u = \begin{pmatrix} (f\circ\Phi)\cdot\partial_2\Phi \\ -(f\circ\Phi)\cdot\partial_1\Phi \end{pmatrix}$$

Zeige: div $u = ((\text{rot } f)\circ\Phi)\cdot(\partial_1\Phi \times \partial_2\Phi)$.
Zeige für die Gramsche Determinante g der Karte Φ die Beziehung

$$g = |\partial_1\Phi \times \partial_2\Phi|^2.$$

Aufgabe 3
Zeige den Satz von Stokes: Es sei $M \subseteq U$, $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, eine durch das Normalenfeld ν orientierte, zweidimensionale C^2-Mannigfaltigkeit. $\Omega \subseteq M$ sei eine kompakte, glatt berandete Teilmenge, deren Rand $\partial\Omega$ deren induzierte Orientierung trage. Wir bezeichnen mit $t(p)$, $p \in \partial\Omega$ den normierten, durch die Orientierung gerichteten Tangentenvektor (vergleiche wieder Aufgabe 1 vom letzten Übungsblatt). Dann gilt für $f \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$ der Satz von Stokes

$$\int_\Omega \text{rot } f(x)\cdot\nu(x)dS(x) = \int_{\partial\Omega} f(x)\cdot t(x)dS(x).$$

Aufgabe 4
Sei Ω eine Kreisscheibe vom Radius 1 mit Mittelpunkt $x_0 \in U$ und der Normalen ν. Weiter sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und $f \in C^1(U)$. Zeige und interpretiere folgende Gleichheit:

$$(\text{rot } f)(x_0)\cdot\nu = \lim_{r\to 0^+} \frac{1}{\pi r^2} \int_{r\partial\Omega} f(x)dx.$$

Aufgabe 5
Man verwende die Sätze von Gauß und Stokes um die Maxwell-Gleichungen von Integralform/Differentialform auf Differentialform/Integralform zu überführen.
Hinweis: Die Maxwell-Gleichungen in Differentialform lauten

$$\begin{aligned} &\text{div } E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ &\text{div } B = 0 \\ &\text{rot } E = -\partial_t B \\ &\text{rot } B = \mu_0(j + \epsilon_0\partial_t E) \end{aligned}$$