Analysis auf Mannigfaltigkeiten

9. Übungsblatt

-keine Abgabe-

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am 05.07.2013 besprochen.

Aufgabe 1
Sei $V = \mathbb{R}^3$. Wir betrachten die duale Basis e_1^*, e_2^*, e_3^*. Was machen die Abbildungen $e_1^* \wedge e_2^*$, $e_1^* \wedge e_3^*$,$e_2^* \wedge e_3^*$, $e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^*$?

Aufgabe 2
Sei ϕ alternierende k-Form, k ungerade. Zeige: $\phi \wedge \phi = 0$. Gilt die Aussage auch für gerade k?

Aufgabe 3
Sei ϕ die alternierende 2-Form auf $V = \mathbb{R}^{2n}$ gegeben durch

$$\phi = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4 + \ldots + dx_{2n-1} \wedge dx_{2n}.$$

Berechne das n-fache Dachprodukt von ϕ.

Aufgabe 4
Zu einer alternierenden k-Form ϕ im $\mathbb{R}^n$ definieren wir die alternierende $n-k$-Form $*\phi$, indem wir auf den Basiselementen

$$*(dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}) = (-1)^{\sigma}(dx_{j_i} \wedge \ldots \wedge dx_{j_{n-k}})$$

setzen, wobei $i_1 < \ldots < i_k$, $j_1 < \ldots < j_{n-k}$, $(i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_{n-k})$ eine Permutation von $(1, 2, \ldots, n)$ ist, und $\sigma = 1$ ist, falls die Permutation ungerade ist, und $\sigma = 0$ ist, falls sie gerade ist, und dann linear fortsetzen. Bestimme für die alternierende 1-Form ϕ im $\mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\phi = a_1 dx_1 + a_2 dx_2$$

die Form $*\phi$ und zeige anschließend für beliebige alternierende Formen ϕ die Beziehung

$$**\phi = (-1)^{k(n-k)}\phi.$$

Aufgabe 5
Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $f(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n))$. Es sei $\phi(y_1, \ldots, y_n)$ für alle $y \in \mathbb{R}^n$ eine k-Form. Wir definieren nun für eine beliebige Differentialform ϕ der Ordnung k die Differentialform

$$(f^*\phi)(x_1, \ldots, x_n)(v_1, \ldots, v_k) = \phi(f(x_1, \ldots, x_n))(Df(x_1, \ldots, x_n)v_1, \ldots, Df(x_1, \ldots, x_n)v_k).$$

Zeige, dass dadurch das Zurückholen von Formen von linearen Abbildungen auf C^1-Funktionen erweitert wurde.
Bemerkung: Das funktioniert auch im Fall $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.
Wir betrachten nun, p_i bezeichne die Projektion auf die i-te Koordinate, die spezielle Differentialform $\phi(y_1, \ldots, y_n)(v_1, \ldots, v_k) = dp_1 \wedge \ldots \wedge dp_n(v_1, \ldots, v_k) = \det(v_1, \ldots, v_k)$. Zeige:

$$f^*\phi = \det(df)dp_1 \wedge \ldots \wedge dp_n.$$

Aufgabe 6
Man lese sich
www.matheplanet.com/default3.html?call=article.php?sid=1175
durch.