Analysis auf Mannigfaltigkeiten

10. Übungsblatt

-keine Abgabe-

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am 12.07.2013 besprochen.

Aufgabe 1
Bestimme die äußere Ableitung der 2-Form

$$\omega = xdx \wedge dy + xy^2 zdy \wedge dz + xe^y dx \wedge dz$$

auf dem $\mathbb{R}^3$. Zeige, dass die 1-Form

$$\omega = (2x - \sin y)dx - x \cos y dy$$

auf dem $\mathbb{R}^2$ exakt und geschlossen ist.

Aufgabe 2
Sei $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Zeige:

$$d * (df) = (\Delta f)dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

Aufgabe 3
Sei $\omega = a(x,y,z)dx + b(x,y,z)dy + c(x,y,z)dz$ eine differenzierbare 1-Form mit $d\omega = 0$. Zeige für diesen Spezialfall das Lemma von Poincaré. Genauer: Zeige, dass $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y,z) = \int_0^1 (a(tx,ty,tz)x) + b(tx,ty,tz)y + c(tx,ty,tz)z)dt$$

die Gleichung $df = \omega$ erfüllt.

Aufgabe 4
Sei $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ homogen vom Grad k, das heißt es gilt $g(tx,ty,tz) = t^k g(x,y,z)$, $t > 0$.
Zeige: Ist g differenzierbar, so gilt

$$xg_x + yg_y + zg_z = kg.$$

Ist $\omega = adx + bdy + cdz$ eine Differentialform mit $d\omega = 0$ und a, b, c homogen vom Grad k, so gilt

$$\omega = d(\frac{xa + yb + zc}{k+1}).$$

Aufgabe 5
Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ gegeben durch $f(r,\phi) = (r\cos\phi, r\sin\phi)$. Zeige:

$$f^*(\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}) = d\phi.$$

Warum heißt die Form $\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$ Windungsform? Ist die Form geschlossen/exakt?
Zeige für die radiale Form $xdx + ydy$ die Gleichung

$$f^*(xdx + ydy) = rdr.$$