Analysis auf Mannigfaltigkeiten

11. Übungsblatt

-keine Abgabe-

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am 19.07.2013 besprochen.

Aufgabe 1
Sei $\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$ die Windungsform aus Blatt 10. Sei S^1 positiv orientiert. Zeige:

$$\int\limits_{S^1} \omega = 2\pi.$$

Aufgabe 2
Zeige, dass die Volumenform ω der n-dimensionalen Sphäre $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ wie folgt gegeben ist:

$$\omega = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j-1} x_j dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \ldots \wedge dx_{n+1}.$$

Berechne das Integral $\int_{S^n} \omega$.

Aufgabe 3
In dieser Aufgabe zeigen wir den Brouwer'schen Fixpunktsatz für Kugeln:
Zeige dazu zunächst mit Hilfe von Aufgabe 2, dass es keine stetig differenzierbare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^{n+1} \supseteq \overline{B}(0,1) \to S^n$ gibt, welche $f|_{S^n} = Id$ erfüllt.
Zeige anschließend, dass jede stetig differenzierbare Abbildung $g\colon \overline{B}(0,1) \to \overline{B}(0,1)$ einen Fixpunkt hat.
Last but not least: Jede stetige Funktion $g\colon \overline{B}(0,1) \to \overline{B}(0,1)$ hat bereits einen Fixpunkt.

Aufgabe 4
Vergleiche den Satz von Stokes für Differentialformen mit den klassischen Integralsätzen.

Aufgabe 5
Wiederhole folgende Begriffe: Rand-adaptierte Karte, das (orientierte) Oberflächenintegral, Zerlegung der Eins, Satz von Gauß+Stokes (klassisch), alternierende k-Form, Differentialform, Zurückholen von Differentialformen, äußere Ableitung von Differentialformen, Integration von Differentialformen, Satz von Stokes.

Hinweis:

Die Anmeldung zur Klausur ist bis zum 15.09.2013 in QISPOS möglich. Alle, die an einer Prüfung teilnehmen möchten (sowohl mündlich als auch schriftlich), werden gebeten sich per Mail bei jens.babutzka@kit.edu und tobias.lamm@kit.edu zu melden.