Analysis auf Mannigfaltigkeiten

Bemerkungen zu dem 8. Übungsblatt

Zur Formel der Gramschen Determinante in Aufgabe 2: Es gilt allgemeiner

$$\det\left(\begin{pmatrix} x^T \\ y^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\right) = \det \begin{pmatrix} x^T x & x^T y \\ y^T x & y^T y \end{pmatrix} = ||x||_2^2 ||y||_2^2 - \langle x, y\rangle^2 = ||x \times y||_2^2$$

Zu dem Beweis des Satzes von Stokes: Wie in der Übung bereits erwähnt, kann der Träger auch im Bereich $\{x \mid x_1 > 0\}$ liegen. Das heißt die Bedingung supp $u \subseteq \widetilde{V}$ ist Unsinn. Richtig müsste es dann supp $u \cap \{x \mid x_1 \leq 0\} \subseteq \widetilde{V}$ heißen. Das funktioniert dann aber auch! Wie gesagt, dieses $\widetilde{V}$ ist nur eine Hilfsmenge, weil supp $u \cap \{x \mid x_1 \leq 0\}$ nicht glatt sein muss. Ist diese Menge glatt, so braucht man diese Hilfsmenge nicht und kann direkt den Satz von Gauß darauf anwenden.
Bei dem allgemeinen Fall mit mehreren Karten habe ich ein Problem gesehen, wo gar keines war! Man benutzt einfach

$$f(x) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j(x) f(x), \quad x \in \Omega,$$

woraus mit der Linearität

$$\text{rot } f(x) = \sum_{j=1}^{N} \text{rot } (\alpha_j(x) f(x)), \quad x \in \Omega,$$

folgt. Und dann zieht man die Summe aus dem Integral raus und ist fertig.
Man beachte, dass natürlich nicht

$$\text{rot } (\alpha_j(x) f(x)) = \alpha_j(x) \text{ rot } f(x)$$

gilt, aber mit der Summe gilt das schon (weil sie halt gerade eins ist und die Rotation linear ist).

Für die Aufgaben 4 und 5 verweise ich auf das Skript von Bernd Schmidt (S. 63 unten bis S. 65), siehe

http://www.math.uni-augsburg.de/de/prof/ana/arbeitsgruppe/schmidt/skripten/Vekana.pdf

In diesem Skript findet sich auch der Rest des Übungsblattes, sowie viele weiter Dinge, welche bisher in der Vorlesung dran waren, oder noch drankommen werden. Sprich: Es eignet sich hervorragend zur Vorlesungsnachbearbeitung etc. (enthält an manchen Stellen mehr Details).