Analysis auf Mannigfaltigkeiten

Bemerkungen zu dem 10. Übungsblatt

Zu Aufgabe 3:
Seien $x, y, z \in \mathbb{R}$ fest. Wir definieren $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ durch $g(t) = (tx, ty, tz)$. Dann gilt $a(g(t)) = a(tx, ty, tz)$. Jetzt kann man die Kettenregel anwenden und erhält

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(a \circ g)(t_0) &= Da(g(t)) \circ Dg(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial a}{\partial x}(tx, ty, tz) & \frac{\partial a}{\partial y}(tx, ty, tz) & \frac{\partial a}{\partial z}(tx, ty, tz) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= x\frac{\partial a}{\partial x}(tx, ty, tz) + y\frac{\partial a}{\partial y}(tx, ty, tz) + z\frac{\partial a}{\partial z}(tx, ty, tz)\end{aligned}$$

Genau das wird auch in Aufgabe 4 benutzt, um die erste Gleichheit zu zeigen (man benutzt die Gleichung aus der Homogenität, differenziert nach t, und wertet bei $t = 1$ aus). Die zweite Behauptung folgt, da

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{xa + yb + zc}{k+1} = \frac{1}{k+1}(a + x\frac{\partial}{\partial x}a + y\frac{\partial}{\partial x}b + z\frac{\partial}{\partial x}c) = a$$

gilt, mit der ersten Aussage und den Relationen der partiellen Ableitungen, die aus $d\omega = 0$ folgen. Genauso behandelt man die anderen beiden partiellen Ableitungen.
Wie bereits erwähnt hätte man hier auch direkt Aufgabe 3 verwenden können.

Zur Vertauschbarkeit von Ableitung und Integral:
Hierzu benötigen wir wohl tatsächlich, dass die Ableitung auch stetig ist. Dann klappt aber alles, da unser Integrationsgebiet $[0, 1]$ kompakt ist. Das Theorem dazu folgt aus Lebesgue, siehe zum Beispiel Theorem 3.16 in
http://www.math.kit.edu/iana3/ schnaubelt/media/analysis3.pdf
Wähle dort einfach U beschränkt (Achtung dort sind die Rollen von t, x vertauscht) um Punkt c) aus dem Theorem zu zeigen. Denn dann ist $\overline{U}$ kompakt, und die Stetigkeit impliziert Beschränktheit.