Analysis auf Mannigfaltigkeiten

Bemerkungen zu dem 11. Übungsblatt

Lösung von Aufgabe 3:
Sei ω definiert wie in Aufgabe 2. Angenommen es gibt so eine Funktion f. Dann:

$$\int_{\overline{B(0,1)}} f^*(d\omega) = \int_{\overline{B(0,1)}} d(f^*\omega) = \int_{S^n} f^*\omega = \int_{S^n} \omega = (n+1)\mathrm{vol}(B(0,1))$$

Andererseits ist die Matrix $Df(x)$ für alle $x \in B(0,1)$ nicht invertierbar, denn sonst gäbe es Umgebungen von x und $f(x)$ auf denen f bijektiv ist (Satz von der impliziten Funktion). Aber f bildet auf die Sphäre ab. Also gilt $\det(Df(x)v_1 \dots Df(x)v_{n+1}) = 0$. Also $f^*(d\omega)(x)(v_1, \dots, v_{n+1}) = 0$ für alle $x \in B(0,1)$ und damit

$$\int_{\overline{B(0,1)}} f^*(d\omega) = 0,$$

ein Widerspruch!
Wir nehmen an, g hat keinen Fixpunkt. Wir betrachten zu jedem Punkt $p \in B(0,1)$ die Halbgerade die bei $g(p)$ startet (dieser Punkt soll aber nicht mehr auf der Geraden liegen) und durch p läuft. Diese Halbgerade schneidet die Sphäre in genau einem Punkt, in $f(p)$. Klar: f ist eingeschränkt auf dem Rand die Identität. Außerdem ist f auch stetig differenzierbar, um das einzusehen benötigt man die konkrete Darstellung von f, siehe (mit Bild)
http://de.wikipedia.org/wiki/Fixpunktsatz_von_Brouwer
Da es f nicht gibt, kann es auch g nicht geben. Im letzten Teil approximiert man einfach f gleichmäßig durch st. db. Funktionen f_n (das geht bekanntlich auf kompakten Mengen immer). Jedes dieser f_n hat einen Fixpunkt a_n. Die Folge $(a_n)_n$ hat eine konvergente Teilfolge und deren Grenzwert ist offensichtlich ein Fixpunkt von f.

Zur Orientierung in Aufgabe 1 (und 4):
Die äußere Einheitsnormale bei $p = (\cos t, \sin t)$ ist gegeben durch p.

Wie sieht es aus mit der Orientierung der Karte $\Phi(t) = (\cos t, \sin t)$? Es gilt $D\Phi(t) = (-\sin t, \cos t)$ und damit $\det(\nu(t), D\phi(t)) = \det \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} = 1$. Also ist diese Karte zu der von dem äußeren Einheitsnormalenfeld induzierten Orientierung positiv orientiert.
Für die Karte $\Phi(t) = (\sin t, \cos t)$ gilt hingegen $\det(\nu(t), D\phi(t)) = \det \begin{pmatrix} \sin t & \cos t \\ \cos t & -\sin t \end{pmatrix} = -1$.
Man vergleiche auch die Rechnung in Aufgabe 4!

Zum Funktionieren dieses Vorgehens: Siehe Beweis von Satz 4.3 und Definition 4.4 im Vektoranalysis-Skript von Bernd Schmidt (sollte aber auch in der Vorlesung dran gewesen, weiß aber die Nummern nicht).