Zu Aufgabe 1:

Frage 1: Es gibt 2 Orientierungen (Sphäre ist natürlich zusammenhängend).
Frage 2: $(3x^2y^4 - 2x^3\mathrm{e}^y)dx \wedge dy$.
Frage 3: M ist immer eine zweidimensionale reelle C^∞-Untermannigfaltigkeit (da offene Menge).
Frage 4: Die zweite Bedingung. Es fehlt Rang $Df = k$ auf Ω. Auch die vierte Bedingung ist nicht korrekt, es muss natürlich $V \subseteq M$ gefordert werden. Hier hat sich also der Fehlerteufel eingeschlichen. Jeder hat diesen Punkt daher geschenkt bekommen.
Frage 5: Die erste Aussage. Gegenbeispiel ist zum Beispiel das Möbiusband. Der Rand dieses Bandes ist eine geschlossene Kurve und damit natürlich orientierbar.
Frage 6: Das äußere Produkt ist nicht kommutativ, sondern antikommutativ.

Zu Aufgabe 2:
(a) Wir betrachten $\det\colon \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$. Natürlich ist det als Polynom eine C^∞-Abbildung. Wir verwenden das Niveaumengenkriterium: Wir setzen $\Omega := GL(n)$. Ω ist also offen im $\mathbb{R}^{n^2}$. Es gilt $M \cap \Omega = M = \det^{-1}(\{0\})$. Es bleibt zu zeigen: Rang $D\det = 1$ auf Ω. Aus der Laplace-Entwicklungsformel folgt unmittelbar

$$D\det(A) = \begin{pmatrix} \det(A - \text{erste Zeile und erste Spalte}) \\ -\det(A - \text{erste Zeile und zweite Spalte}) \\ \vdots \\ (-1)^i(-1)^j \det(A - \text{i-te Zeile und j-te Spalte}) \\ \vdots \\ \det(A - \text{letzte Zeile und letzte Spalte}) \end{pmatrix}$$

Sind alle Einträge dieses Vektors 0, so ist A nicht invertierbar. Um das einzusehen benutzt man wieder die Laplace-Entwicklungsformel und erhält damit direkt $\det A = 0 + \ldots + 0 = 0$.
(b) Aus dem (a)-Teil folgt, dass die Vektoreinträge des Vektors $D\det(E_n)$ den Wert 1 haben, falls man eine i-te Zeile und Spalte gestrichen hat und sonst den Wert 0. Nach Satz 2.1.iii) folgt sofort $T_{E_n}M = \{A \in \mathbb{R}^{n^2} \mid \mathrm{Spur}(A) = 0\}$. Alternativ kann man auch direkt $D\det(E_n)$ bestimmen, so wie in der Übung geschehen.
(c) Der Tangentialraum hat stets die gleiche Dimension wie die Mannigfaltigkeit, hier also $n^2 - 1$.

Zu Aufgabe 3:

(a) Es gilt

$$\int_{\partial\Omega} f \cdot \nu dS(x,y,z) = \int_{(0,\pi)\times(0,2\pi)} f(\Psi(x,y)) \cdot \nu(\Psi(x,y)) G_\Psi(x,y) dxdy.$$

Dabei bezeichnet G_Ψ die Gramsche Determinante der Karte. Es gilt (vgl. Beispiel auf Seite 15 im Skript)

$$\nu(\Psi) = \pm(\partial_x\Psi \times \partial_y\Psi) \cdot \frac{1}{||\partial_x\Psi \times \partial_y\Psi||} = \pm \sin x \begin{pmatrix} bc\sin x\cos y \\ ac\sin x\sin y \\ ab\cos x \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{||\partial_x\Psi \times \partial_y\Psi||}$$

Wir setzen $x = y = \pi/2$. Dann gilt $\nu(\psi(x,y)) = \pm \begin{pmatrix} 0 \\ ac \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{||\partial_x\Psi(x,y) \times \partial_y\Psi(x,y)||}$ und wegen $\Psi(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$ liefert $+$ oben die äußere Einheitsnormale an diesem Punkt und wegen der Stetigkeit auch überall sonst. Wegen $G_\Psi(x,y) = ||\partial_x\Psi \times \partial_y\Psi||$ (vgl. Bemerkungen zu Übungsblatt 8) folgt also

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} f \cdot \nu dS &= \int_{(0,\pi)\times(0,2\pi)} \alpha abc(\sin^3 x\cos^2 y + \sin^3 x\sin^2 y + \cos^2 x\sin x) dxdy \\ &= \alpha abc \int_{(0,\pi)\times(0,2\pi)} \sin^3 x + \cos^2 x\sin x dxdy \\ &= \alpha abc \int_{(0,\pi)\times(0,2\pi)} \sin x dxdy \\ &= 4\pi\alpha abc\end{aligned}$$

(b) Die Voraussetzungen für den Satz von Gauß (Skript Seite 22) sind natürlich erfüllt, wähle dort z.B. $U = \mathbb{R}^3$. Nach diesem Satz ist das obige Integral gleich $\int_\Omega \operatorname{div} f(x,y,z) dxdyz = 3\alpha \int_\Omega 1 dxdydz$. Parametrisiere Ω durch $\varphi\colon (0,1) \times (0,\pi) \times (0,2\pi)$ gegeben durch $\varphi(t,x,y) = t\Phi(x,y)$ mit Φ aus dem (a)-Teil (Karte überdeckt fast überall). Nachrechnen zeigt, dass die Gramsche Determinante= Betrag der Jacobi-Matrix durch $t^2 abc(\cos^2 x\sin x\cos^2 y + \sin^3 x\sin^2 y + \cos^2 x\sin^2 y\sin x + \sin^3 x\cos^2 y) = t^2 abc\sin x$ gegeben ist. Damit

$$\int_\Omega 1 dxdydz = abc \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} t^2 \sin x dtdxdy = abc4\pi/3.$$

Zu Aufgabe 4:
Man zeigt leicht $d\omega = 0$, denn zum Einen

$$d\omega = \frac{(x^2+y^2+z^2)^{3/2} - 3x^2(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}{(x^2+y^2+z^2)^3} dx \wedge dy \wedge dz + \dots$$

und zum Anderen

$$3x^2(x^2+y^2+z^2)^{1/2} + 3y^2(x^2+y^2+z^2)^{1/2} + 3z^2(x^2+y^2+z^2)^{1/2} = 3(x^2+y^2+z^2)^{3/2}.$$

Wir nehmen an, es gäbe ν mit $d\nu = w$. Wir betrachten $\Omega := S^2 \subseteq S^2 := M$. M ist zweidimensionale Mannigfaltigkeit und $\Omega \subseteq M$ ist kompakt und hat glatten Rand, denn dieser ist sogar leer. Wir setzen $G := \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Also sind die Voraussetzungen für Stokes (Skript Seite 36) erfüllt und es gilt

$$\int_{S^2} \omega = \int_{S^2} d\nu = \int_{\emptyset} \nu = 0.$$

Wir definieren $\varphi = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$. Wir setzen $M = G = \mathbb{R}^3$ und $\Omega = \overline{B}(0,1)$. Wieder liefert Stokes

$$\int_{S^2} \omega = \int_{S^2} \varphi = \int_{\overline{B}(0,1)} d\varphi = \int_{\overline{B}(0,1)} 3dx \wedge dy \wedge dz = 3\mathrm{vol}(\overline{B}(0,1)) = 4\pi$$

Dabei wurde $\varphi = \omega$ auf S^2 ausgenutzt. Man hätte dieses Integral auch direkt berechnen können, das wäre aber nicht so schön und einfach gewesen. Insgesamt haben wir damit einen Widerspruch.