28.04.2014
Analysis auf Mannigfaltigkeiten
Dr. Simon Blatt
Katharina Illner

Karlsruhe Institute of Technology

Übungsblatt 2

Aufgabe 1 (Tangentialkegel)

Bestimmen Sie die Tangentialkegel der Menge

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$$

und der Neilschen Parabel

$$N := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^3 = y^2\}.$$

Aufgabe 2 (Stereographische Projektion)

Wir betrachten die Abbildung

$$i_N : \mathbb{R}^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{N\}, \quad i_N(x) := 2\frac{x - N}{\|x - N\|^2} + N$$

wobei $N = (0, \dots, 0, 1)$ der *Nordpol* der $\mathbb{S}^{n-1}$ ist.

1. Zeigen Sie, dass i_N ein Diffeomorphismus ist, der $\mathbb{S}^{n-1} \setminus \{N\}$ bijektiv auf $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ abbildet.
2. Zeigen Sie, dass es einen Atlas aus zwei Karten für die Sphäre $\mathbb{S}^{n-1}$ gibt.

Aufgabe 3 (Zusammenhängende Untermannigfaltigkeiten)

Es sei M eine zusammenhängende C^r-Untermannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass es zu zwei beliebigen Punkten $p, q \in M$ eine C^r Abbildung $\gamma : [0, 1] \to M$ gibt mit $\gamma(0) = p, \gamma(1) = q$.

Aufgabe 4 (Die Sphäre)

Es sei $M \subset \mathbb{R}^m$ eine $(m-1)$-dimensionale zusammenhängende C^1-Mannigfaltigkeit derart, dass es einen Punkt $p_0 \in \mathbb{R}^m$ gibt mit

$$p - p_0 \in N_pM, \quad \forall p \in M.$$

Zeigen Sie, dass M Teil einer $(n-1)$-dimensionalen Sphäre ist. (Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $f : M \to \mathbb{R}$, $f(p) := \|p - p_0\|^2$ und verwenden Sie Aufgabe 3!)

* Aufgabe 5 (Schnitt von Mannigfaltigkeiten)

Es seien $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^m$ C^r-Untermannigfaltigkeiten der Dimension $m - 1$. Wir nehmen an, dass sich diese Untermannigfaltigkeiten *transversal schneiden*, d.h. dass $T_pM_1 \neq T_pM_2$, $\forall p \in M_1 \cap M_2$. Zeigen Sie, dass $M_1 \cap M_2$ eine $(m-2)$-dimensionale C^r-Untermannigfaltigkeit ist.

Abgabe: In der Übung am Dienstag, 06. 05. 2014.