12.05.2014
Analysis auf Mannigfaltigkeiten
Dr. Simon Blatt
Katharina Illner

Karlsruhe Institute of Technology

Übungsblatt 3

Aufgabe 1 (Motivation Flächenmaß I)

Wir betrachten eine injektive lineare Abbildung

$$A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m.$$

Außerdem sei $\mathcal{L}^d$ das d-dimensionale Lebesguemaß.

1. Zeigen Sie, dass es genau ein Maß μ auf der Borelsigmaalgebra von $Bild(A)$ gibt mit $\mu(E) = \mathcal{L}^d(T^{-1}(E))$ für alle Isometrien $T : \mathbb{R}^d \to Bild(A)$ und alle Borelmessbaren Mengen $E \subset Bild(A)$.
2. Zeigen Sie, dass dieses Maß durch $\mu(A(E)) = \mathcal{A}_E(A)$ gegeben ist.

* Aufgabe 2 (Motivation Flächenmaß II)

Wir approximieren in dieser Aufgabe zweidimensionale Flächenstücke durch Dreiecke, um die Flächenformel aus der Vorlesung zu motivieren.
Es sei dazu $\gamma \in C^1([0,1]^2, \mathbb{R}^m)$ eine Immersion. Für $k \in \mathbb{N}$ betrachten wir das Gitter

$$Z_k := \left(\frac{1}{k}\mathbb{Z}\right)^2 \cap [0,1[^2.$$

Wir benutzen die Menge der Dreiecke $L_k(x)$ mit den Ecken $\gamma(x), \gamma(x + (1/k, 0)), \gamma(x + (0, 1/k))$ und $R_k(x)$ mit den Ecken $\gamma(x + (1/k, 1/k)), \gamma(x + (1/k, 0)), \gamma(x + (0, 1/k))$ als Approximation der immersierten Fläche $\gamma(]0,1[^2])$. Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{A}_k := \sum_{x \in Z_k} \left(\mathcal{A}(L_k(x)) + \mathcal{A}(R_k(x))\right) \xrightarrow{k \to \infty} \mathcal{A}_{[0,1]^2}(\gamma)$$

wobei $A(L_k(x))$ und $A(R_k(x))$ die Fläche der Dreiecke bezeichnet. Führt eine ähnliche Konstruktion auch für höherdimensionale Flächenstücke und allgemeinere Gebiete zum Ziel?

Aufgabe 3 (Flächeninhalt der Scherkschen Minimalfläche)

Zur Funktion

$$u : [-\pi/2, \pi/2]^2 \to \mathbb{R}, \quad u(x,y) = \log\left(\frac{\cos(x)}{\cos(y)}\right)$$

betrachten wir die Parametrisierung des Graphen

$$\gamma :]-\pi/2, \pi/2[^2 \to \mathbb{R}^3, \quad \gamma(x,y) := (x, y, u(x,y)).$$

Berechnen Sie $\mathcal{A}_{]-\pi/2,\pi/2[^2}(\gamma)$.

Aufgabe 4 (Fläche des Torus)

1. Es sei $\gamma = (r, h) : I \to \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ eine reguläre C^1-Kurve (d.h. eine Immersion), $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Interval und

$$\psi : I \times]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^3, \psi(t, \varphi) := (r(t)\cos(\varphi), r(t)\sin(\varphi), h(t))$$

eine Parametrisierung der zugehörigen Rotationsfläche. Berechnen Sie die Fläche $\mathcal{A}_{I\times]0,2\pi[}(\psi)$. Was erhalten Sie, wenn Sie zusätzlich annehmen, dass $|\gamma'| \equiv 1$, d.h. wenn γ nach Bogenlänge parametrisiert ist?

2. Berechnen Sie die Fläche des Rotationstorus aus Aufgabe 3 des ersten Übungsblattes.

Abgabe: In der Übung am Dienstag, 20. 05. 2014.