26.05.2014
Analysis auf Mannigfaltigkeiten
Dr. Simon Blatt
Katharina Illner

Karlsruhe Institute of Technology

Übungsblatt 4

Aufgabe 1 (Integration über Untermannigfaltigkeiten)

Zeigen Sie, dass für eine messbare Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ in der Tat

$$\int_M f ds = \sum_{i \in \mathbb{N}} \int_{\gamma_i^{-1}(M_i)} (f \circ \gamma_i)(x) J\gamma_i(x) dx$$

gilt. (Hinweis: Zeigen Sie wie in der Vorlesung angedeutet die Formel zuerst für charakteristische Funktion und positive Treppenfunktionen!)

Aufgabe 2 (Ein Integral über die Sphäre)

Berechnen Sie

$$\int_{\mathbb{S}^2} x^2 y^2 z^2 dS.$$

Aufgabe 3 (Äußeres Produkt)

Zeigen Sie, dass für $\omega \in \Lambda^k \mathbb{R}^m, \mu \in \Lambda^l \mathbb{R}^m$ gilt

$$\omega \wedge \mu = (-1)^{lk} (\mu \wedge \omega) .$$

Aufgabe 4 (Äußeres Produkt von 1-Formen)

Es seien $\omega_1, \dots, \omega_k \in \Lambda^1 \mathbb{R}^m$. Zeigen Sie (zum Beispiel durch vollständige Induktion nach k), dass

$$(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k)(v_1, \dots, v_k) = \det(\omega_i(v_j)).$$

Aufgabe 5 (Tensorprodukt und Äußerem Produkt)

Wir bezeichnen die Menge aller k-linearen Abbildungen $\omega : \overbrace{\mathbb{R}^m \times \cdots \times \mathbb{R}^m}^{k\text{-mal}} \to \mathbb{R}$ mit $T^k\mathbb{R}^m$. Wie definieren das Tensorprodukt $\omega \otimes \mu \in T^{k+l}\mathbb{R}^m$ zweier multilinearer Abbildungen $\omega \in T^k\mathbb{R}^m, \mu \in T^l\mathbb{R}^m$ durch durch

$$(\omega \otimes \mu)(v_1, \dots v_{k+l}) := \omega(v_1, \dots v_k)\mu(v_{k+1}, \dots, v_{k+l}).$$

Offensichtlich ist das Tensorprodukt assoziative und bilinear. Außerdem setzen wir

$$Alt(\omega)(v_1, \dots v_k) := \frac{1}{k!} \sum_{p \in S_k} sign(p) \omega(v_{p(1)}, \dots v_{p(k)})$$

für alle $\omega \in T^k\mathbb{R}^m$ wobei S^k die Menge aller Permutationen der Zahlen $1, \dots k$ ist.

1. Zeigen Sie, dass $Alt(\omega) \in \Lambda^k\mathbb{R}^m$ und dass für $\omega \in \Lambda^k\mathbb{R}^m$, $\mu \in \Lambda^l\mathbb{R}^m$ gilt

$$\omega \wedge \mu = \frac{(k+l)!}{k!l!} Alt(\omega \otimes \mu).$$

2. Rechnen Sie nach, dass für $\omega \in T^k\mathbb{R}^m, \mu \in T^l\mathbb{R}^m, \nu \in T^m\mathbb{R}^m$ gilt

$$Alt(\omega \otimes \mu \otimes \nu) = Alt(\omega \otimes Alt(\mu \otimes \nu)) = Alt(Alt(\omega \otimes \mu) \otimes \nu).$$

3. Zeigen Sie, dass

$$(\omega \wedge \mu) \wedge \nu = \omega \wedge (\mu \wedge \nu) = \frac{(k+l+m)!}{k!m!l!} Alt(\omega \otimes \mu \otimes \nu).$$

Abgabe: In der Übung am Dienstag, 02. 06. 2014.