17.06.2014
Analysis auf Mannigfaltigkeiten
Dr. Simon Blatt
Katharina Illner

Karlsruhe Institute of Technology

Übungsblatt 5

Aufgabe 1 (Rechenregeln für Differentialformen)

1. Zeigen Sie, dass für $\omega_i \in C^1(\Omega, \Lambda_i^k \mathbb{R}^m)$, $i = 1, 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ offen, gilt

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = (d\omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^{k_1} \omega_1 \wedge (d\omega_2).$$

2. Falls außerdem $\gamma \in C^1(\Omega_1, \Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, so gilt

$$\gamma^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = \gamma^* \omega_1 \wedge \gamma^* \omega_2.$$

Aufgabe 2 (Integration von Differentialformen)

Zeigen Sie, dass die Definition des Integrals einer Differentialform über eine Mannigfaltigkeit nicht von der Wahl der lokalen Parametrisierungen abhängt!

Aufgabe 3 (Der Integralsatz von Stokes)

Zeigen Sie, dass der Integralsatz von Stokes für nichtkompakte Mannigfaltigkeiten im Allgemeinen falsch ist.

* Aufgabe 4 (Orientierbare Mannigfaltigkeiten)

Es sei $M \subset \mathbb{R}^{d+1}$ eine d-dimensionale differenzierbare Untermannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass M genau dann orientierbar ist, wenn es eine stetiges Einheitsnormalenfeld gibt, d.h wenn es eine stetige Abbildung $\nu : M \to \mathbb{R}^{d+1}$ gibt mit $\nu(x) \in N_x M$ und $\|\nu(x)\| \equiv 1$ für alle $x \in M$.

* Aufgabe 5 (Orientierbare Untermannigfaltigkeiten)

Es sei $M \subset \mathbb{R}^{d+1}$ eine orientierbare d-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass es eine offenen Umgebung $V \subset \mathbb{R}^{d+1}$ von M gibt und eine Funktion $f : V \to \mathbb{R}$ gibt, so dass $M = f^{-1}(0)$ und $f'(x)$ für alle $x \in V$ den Rang 1 hat.

Abgabe: In der Übung am Dienstag, 24. 06. 2014.