02.07.2014
Analysis auf Mannigfaltigkeiten
Dr. Simon Blatt
Katharina Illner

Karlsruhe Institute of Technology

Übungsblatt 6

Aufgabe 1 (partielle Integration)

Es sei $M \subset \mathbb{R}^m$ eine $k+l+1$-dimensionale kompakte differenzierbare Untermannigfaltigkeit. Außerdem sei ω eine differenzierbare l-Form und μ eine differenzierbare k-Form auf einer offenen Umgebung von M. Zeigen Sie, dass

$$\int_M \omega \wedge d\mu = a \int_M d\omega \wedge \mu$$

für ein $a \in \mathbb{R}$ und bestimmen Sie a.

Aufgabe 2 (Die Windungsform)

Auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ betrachten wir die Differentialform

$$\omega = \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$$

und die Polarkoordinatenabbildung

$$P_2 : (0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \quad (r, \varphi) \to (r \cos\varphi, r \sin\varphi).$$

Berechnen Sie $P_2^*\omega$!

Aufgabe 3 (Integration von Differentialformen)

Betrachten Sie die Differentialform

$$\omega := \frac{\sum_{i=0}^n (-1)^{i+1} x_i dx^1 \wedge \cdots \wedge \hat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^n}{\|x\|^n}$$

auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass ω geschlossen aber nicht exakt ist!

Aufgabe 4 (Eine kleine Rechenregel)

Es sei ω eine exakte und μ eine geschlossene C^1-Form auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^m$. Zeigen Sie, dass dann auch $\omega \wedge \mu$ exakt ist.

Abgabe: In der Übung am Dienstag, 08. 07. 2014.