UNIVERSITÄT KARLSRUHE
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. A. Müller-Rettkowski

SS 2009
26.06.2009

10. Übungsblatt

Distributionentheorie

Aufgabe 1 (siehe Aufgabe 3 vom 9. Übungsblatt)

Zeigen Sie:

a) $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),\ \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R}^n),$
$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ (stetige Einbettungen).

b) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ liegt dicht in $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$.

Aufgabe 2 (vgl. Aufgabe 2 vom 9. Übungsblatt)

$$C(x) := T(\tau_x \check{\psi}),\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Zeigen Sie:

a) $C \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, falls $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n),\ \psi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$,

b) $C \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, falls $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n),\ \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Aufgabe 3

Es sei $a > 0$ eine feste Zahl. Untersuchen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} T_n$ für $T_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a^k \delta_k (n \in \mathbb{N})$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ und in $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$.

Aufgabe 4

a) Es sei $\gamma > 0, \xi \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie

$$\int_0^\infty e^{-\gamma x^2} \cos(x\xi) dx.$$

b) Es sei $\alpha > 0$ und $f_\alpha(x) = \dfrac{1}{\alpha\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}}, x \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie für $\alpha, \beta > 0:\ f_\alpha * f_\beta$.

Hinweise: Verwenden Sie $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.
Ergebnis für b): $f_{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$.