UNIVERSITÄT KARLSRUHE
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. A. Müller-Rettkowski

SS 2009
03.07.2009

11. Übungsblatt
Distributionentheorie

Aufgabe 1

Geben Sie ein Beispiel für den folgenden Sachverhalt: Aus $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ und $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ mit $\varphi(x) = 0$ für alle $x \in \operatorname{supp}(T)$ folgt i.a. nicht : $T(\varphi) = 0$.

Aufgabe 2

Es sei $m \in \mathbb{N}$ gegeben. Beweisen Sie:

Notwendig und hinreichend dafür, dass für $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ $\quad x^m T = 0$ erfüllt ist, ist, dass T die Form $\sum\limits_{j=0}^{m-1} c_j D^j \delta$ mit Konstanten c_j hat.

Hinweis: Machen Sie sich klar, dass folgendes gilt:

Jede Testfunktion $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ kann auf genau eine Art wie folgt zerlegt werden:

$$\psi(x) = \lambda(x) \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{j!} \psi^{(j)}(0) x^j + \chi(x).$$

Hierbei sind $\lambda, \chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ mit $\chi^{(j)}(0) = 0,\ j = 0, 1, \ldots, m-1$ und $\lambda(0) = 1$ und $\lambda^{(j)}(0) = 0$ für $j = 1, 2, \ldots, m-1$.

Aufgabe 3

Es seien $e \in \mathbb{R}^n$ ein Einheitsvektor und

$$\eta_h := \frac{1}{h} (\tau_0 - \tau_{he}) \qquad (h > 0)\,.$$

Zeigen Sie, dass für jedes $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

$$\eta_h \varphi \to D_e \varphi \qquad (h \to 0) \text{ in } \mathcal{D}(\mathbb{R}) \qquad \text{gilt.}$$

Aufgabe 4 ($\mathcal{S}$ ist in Aufgabe 3 des 9. Übungsblattes definiert worden)

Zeigen Sie:

1) Aus $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$ folgt $\varphi \cdot \psi \in \mathcal{S}$,

2) $\partial_j : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ ist stetig,

3) $M_j : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ ist stetig (hierbei ist $(M_j\varphi)(x) = x_j \varphi(x)$),

4) $\mathcal{S} \hookrightarrow L^p\ (1 \leq p < \infty)$.