UNIVERSITÄT KARLSRUHE
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. A. Müller-Rettkowski

SS 2009
17.07.2009

13. Übungsblatt

Distributionentheorie

Aufgabe 1

Es seien $p = p(x)$, $x \in \mathbb{R}$, ein Polynom und $f \in \mathcal{S}$. Drücken Sie $\mathcal{F}(p(\partial_x)f)$ und $\mathcal{F}(pf)$ jeweils durch $\mathcal{F}(f)$ aus.

Aufgabe 2

1. Es sei $g_t(x) = e^{-t\|x\|^2}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$.
   Berechnen Sie $g_t * g_s \qquad (t, s > 0)$. Berechnen Sie $\mathcal{F}(xg_t)$ in $\mathbb{R}^1$.
2. Für $f(x) = e^{-ax^2+bx+c}$, $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$, ist $\mathcal{F}(f)$ zu berechnen.

Aufgabe 3

Beweisen Sie noch einmal anders (9. Ü/A3c), dass aus $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$ folgt: $\varphi * \psi \in \mathcal{S}$.

Aufgabe 4

a) Zeigen Sie: Aus $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ und $\varphi(0) = 0$ folgt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}(x)dx = 0\,.$$

b) Es sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ und $\varphi(x) := f(x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$. Welcher Zusammenhang besteht zwischen $\hat{\varphi}$ und $\hat{f}$?

Aufgabe 5

Entscheiden Sie, ob die durch $f(x) = e^x$, $g(x) = e^x \sin(x)$, $(x \in \mathbb{R})$ erzeugten Distributionen in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ oder $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ liegen.

– bitte wenden –

Aufgabe 6

a) $f_1(x) := \begin{cases} 1 & , \quad -1 \leq x \leq 1\,, \\ 0 & , \quad |x| > 1\,, \end{cases}$

$f_2(x) := \sup\,(0, 2 - |x|)$, $x \in \mathbb{R}$.

Berechnen Sie $\widehat{f_1}$, $\widehat{f_2}$. Wie hängen f_1 und f_2 zusammen?

b) Berechnen Sie: $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$, $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x^3}\,dx$ und $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^4 x}{x^4}\,dx$.

(Verwenden Sie bei b) f_1 aus a) und (9.3), (9.4) aus Satz 9).