UNIVERSITÄT KARLSRUHE
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. A. Müller-Rettkowski

SS 2009
01.05.2009

2. Übungsblatt

Distributionentheorie

Aufgabe 1

Es seien $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$. Zeigen Sie:

Es gibt von x unabhängige positive Konstanten c_1, c_2, so dass gilt:

$$c_1(1+\ \|x\|)^N \leq \sum_{|\alpha|\leq N} |x^\alpha| \leq c_2(1+\|x\|)^N \,.$$

Aufgabe 2

Es sei $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R})$. Berechnen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\varphi(x)\,dx$$

für

a) $\quad f_n(x) = \dfrac{n}{2}e^{-n|x|}\,,$ $\qquad$ b) $\quad f_n(x) = \dfrac{2}{\pi}\,\dfrac{n}{e^{nx}+e^{-nx}}\,,$

c) $\quad f_n(x) = \dfrac{1}{\pi}\,\dfrac{n}{1+n^2x^2}$ $\qquad\qquad (n = 1, 2, \ldots)$

– bitte wenden –

Aufgabe 3

Definiere $(u * v)(x) := \int_{\mathbb{R}} u(x-y)v(y)dy$, $x \in \mathbb{R}$, wobei u, v auf $\mathbb{R}$ definierte Funktionen sind, für die das Integral existiert.

Es sei

$$H(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0\,, \\ 1 & , \quad x \geq 0\,. \end{cases}$$

Für $a > 0$ bedeute H_a die folgende Funktion:

$$H_a(x) = \frac{1}{a} H(x) H(a-x),\ x \in \mathbb{R}\ .$$

a) Zeigen Sie:
   Aus $v \in C^k(\mathbb{R})$ folgt $v * H_a \in C^{k+1}(\mathbb{R})$.

b) Mit einer monoton fallenden Folge positiver Zahlen $a_0, a_1, a_2, \ldots$, für die $a = \sum_{j=0}^{\infty} a_j < \infty$ gilt, definiere

$$u_k := H_{a_0} * H_{a_1} * H_{a_2} * \ldots * H_{a_k}\ ,\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

   Es sind nachzuweisen:
   $u_k \in C_0^{k-1}(\mathbb{R}),\ u_k(x) = 0$ für $x \notin [0, a]$,
   $u_k \to u\ (k \to \infty)$ gleichmäßig in $\mathbb{R}$,
   $u \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}),\ \int_{\mathbb{R}} u(x)dx = 1.$