UNIVERSITÄT KARLSRUHE
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. A. Müller-Rettkowski

SS 2009
08.05.2009

3. Übungsblatt

Distributionentheorie

Aufgabe 1

a) $\mathcal{D}_0(\mathbb{R}) := \{\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mid \text{es gibt ein } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \text{ mit } \varphi' = \psi\}$.

   1) Geben Sie eine Bedingung dafür an, dass $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ in $\mathcal{D}_0(\mathbb{R})$ liegt.

   2) Es sei $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ mit $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0(x)dx = 1$. Zeigen Sie, dass sich jede Testfunktion $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ eindeutig in der Form $\varphi = c\varphi_0 + \psi$ schreiben lässt, wobei c eine Konstante und ψ aus $\mathcal{D}_0(\mathbb{R})$ ist.

b) Es sei $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ mit $\varphi_0(0) = 1$. Zeigen Sie: Jede Testfunktion $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ lässt sich in der Form $\varphi(x) = x\chi(x) + c\varphi_0(x)$ mit $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ und einer Konstanten c schreiben.

Aufgabe 2

Def: Die Folge $(\phi_k)_k \subset \mathcal{D}(\Omega)$ konvergiert für $k \to \infty$ gegen $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ in $\mathcal{D}(\Omega)$, falls erfüllt sind:

1) Es gibt eine kompakte Menge $K, K \subset \Omega$, mit $\operatorname{supp}(\phi_k) \subset K \quad \forall k$.

2) Es gilt $\partial^\alpha \phi_k \to \partial^\alpha \phi \quad (k \to \infty)$ gleichmäßig auf K für jeden Multiindex α.

   Zeigen Sie:

   a) Für jede Funktion $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ gilt
   $$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq L\|x - y\|,\ x, y \in \mathbb{R}^n,\ \text{mit } L = \text{ const.}$$

   b) Für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ gilt: $\varphi_h \to \varphi \quad (h \to 0)$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Hierbei ist $\varphi_h(x) := \varphi(x + h)$, $x \in \mathbb{R}^n,\ h \in \mathbb{R}^n$.

   c) Für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ gilt:
   $$\frac{1}{h}(\varphi_h - \varphi) \to \varphi' \ (h \to 0) \ \text{ in } \ \mathcal{D}(\mathbb{R})\,.$$

– bitte wenden –

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass für $\hat{f}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)dx$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, mit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt:

$$\lim_{\|\xi\| \to \infty} \hat{f}(\xi) = 0 \ .$$

(Verwenden Sie, dass $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$ dicht liegt.)

Aufgabe 4

Es seien $\varrho_\varepsilon \quad (\varepsilon > 0)$ die auf S. 7 unten der Vorlesungszusammenfassung definierten Testfunktionen. Zeigen Sie, dass für $u \in C_0^j(\mathbb{R}^n)$ gilt: $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \sup\limits_{\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha (u * \varrho_\varepsilon)(x)| = 0$, $|\alpha| \leq j$.