UNIVERSITÄT KARLSRUHE
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. A. Müller-Rettkowski

SS 2009
15.05.2009

4. Übungsblatt
Distributionentheorie

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass für $u, v \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$ gilt:

$$\|u * v\|_1 \leq \|u\|_1 \, \|v\|_1 \, .$$

Aufgabe 2

Untersuchen Sie die Folge (ψ_n):

$$\psi_n(t) := \begin{cases} \dfrac{1}{n} \exp(-\dfrac{n^2}{n^2 - t^2}) & , \quad |t| < n \\ 0 & , \quad |t| \geq n \end{cases}$$

auf Konvergenz in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Aufgabe 3

a) Zeigen Sie, dass $\partial^\beta : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ stetig ist.

b) Es sei $h \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $M : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ der durch $M(\varphi) := h\varphi$ für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ definierte Operator. Zeigen Sie, dass M stetig ist.

Aufgabe 4

Definiere $J_\varepsilon : C^0 \to C^\infty$ durch

$$J_\varepsilon f := f * \varrho_\varepsilon \, .$$

Zeigen Sie: $J_\varepsilon f$ ist für $f \in L^p$ $\quad (1 \leq p < \infty, \ \|f\|_p^p := \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx < \infty)$ definiert, und es gilt $\|J_\varepsilon f\|_p \leq \|f\|_p$.