UNIVERSITÄT KARLSRUHE
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. A. Müller-Rettkowski

SS 2009
22.05.2009

5. Übungsblatt
Distributionentheorie

Aufgabe 1

a) Zeigen Sie, dass durch $T(\varphi) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi^{(n)}(n),\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, eine Distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ definiert wird.

b) Es seien $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}),\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ und $\varphi_y(x) := \varphi(x,y)$ für $y \in \mathbb{R}$ fest und $x \in \mathbb{R}$.

Zeigen Sie, dass durch $G(\varphi) := \int\limits_{-\infty}^{+\infty} T(\varphi_y)dy$ eine Distribution $G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ definiert wird.

Aufgabe 2

Untersuchen Sie, ob durch

a) $$T(\varphi) := \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{0}^{+\infty} \varphi(x,y)dxdy \quad , \ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)\ ,$$

b) $$T(\varphi) := \int\limits_{0}^{\infty} \int\limits_{0}^{\infty} \varphi(x,y)dxdy \quad , \ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$$

Distributionen $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ definiert werden.

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass durch

$$T(\varphi) := \int\limits_{0}^{1} x^{-3/2}(\varphi(x) - \varphi(0))dx + \int\limits_{1}^{\infty} x^{-3/2}\varphi(x)dx - 2\varphi(0),\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\ ,$$

eine Distribution in $\mathbb{R}$ gegeben ist und dass

$$T(\varphi) = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^{3/2}}\, dx,\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \text{ gilt.}$$

Aufgabe 4

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $x_0 \in \Omega$. Zeigen Sie, dass durch $T(\varphi) = (\partial^\alpha \varphi)(x_o)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, eine Distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ der Ordnung $|\alpha|$ definiert wird.