UNIVERSITÄT KARLSRUHE
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. A. Müller-Rettkowski

SS 2009
29.05.2009

6. Übungsblatt
Distributionentheorie

Aufgabe 1

a) Es sei $w \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, und es gelte $\int\limits_{\mathbb{R}^n} x^\alpha w(x)dx = 0$ für $|\alpha| < k$. Für $\varepsilon > 0$ und $x \in \mathbb{R}^n$ bilde $u_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n-k} w(\frac{x}{\varepsilon})$.
Berechnen Sie $\lim\limits_{\varepsilon \to 0+} u_\varepsilon$ in $D'(\mathbb{R}^n)$.

b) Es ist mit $N \in \mathbb{N}$ für $x, t \in \mathbb{R}$ $\quad u_t(x) = t^N e^{itx}$ gegeben.
Berechnen Sie $\lim\limits_{t \to \infty} u_t$ in $D'(\mathbb{R})$.

c) Für $u_t(x) = te^{itx} H(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$, ist $\lim\limits_{t \to \infty} u_t$ in $D'(\mathbb{R})$ zu berechnen.

Aufgabe 2

a) Gegeben sind $(f_k)_k \subset L^2(\mathbb{R})$ und $f \in L^2(\mathbb{R})$. Es gelte für alle $a, b \quad (a < b)$

$$\lim_{k \to \infty} \int_a^b |f_k(t) - f(t)|^2 dt = 0\,.$$

Zeigen Sie: $\quad f_k \to f \quad (k \to \infty)$ in $D'(\mathbb{R})$.

b) Es sei $(\varphi_j)_j \subset C^\infty(\mathbb{R})$ eine Folge mit der Eigenschaft: für jedes $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ konvergiert $(\varphi_j^{(k)})_j$ gleichmäßig auf jedem beschränkten Intervall. Es sei φ die Grenzfunktion der Folge $(\varphi_j)_j$. Zeigen Sie, dass für jede Distribution $T \in D'(\mathbb{R})$ die Distributionenfolge $(\varphi_j T)_j$ gegen φT konvergiert.

Aufgabe 3

(Bezieht sich auf Aufgabe 2, 5. Ü)

Bilden Sie $D_1 T$ und $D_2 T$ für T aus Aufgabe 2 a), bilden Sie $D_2 D_1 T$ für T aus Aufgabe 2 b).

Aufgabe 4

Für $x \in \mathbb{R}$ ist

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (k + \frac{1}{2} - \frac{x}{2\pi})(H(x - 2k\pi) - H(x - 2(k+1)\pi))$$

gegeben. Berechnen Sie Df.