UNIVERSITÄT KARLSRUHE
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. A. Müller-Rettkowski

SS 2009
12.06.2009

8. Übungsblatt
Distributionentheorie

Aufgabe 1

$T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ heißt <u>von der ersten Variablen unabhängig</u>, falls für jedes $c \in \mathbb{R}$ mit $e_1 = (1,0)$

$$T = \tau_{-ce_1} T \qquad \text{gilt.}$$

Zeigen Sie: $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ ist genau dann von der ersten Variablen unabhängig, wenn $D_1 T = 0$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ gilt.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass durch

$$pV(\frac{1}{x^2})(\varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int\limits_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2}\, dx,\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

eine Distribution definiert wird.

Zeigen sie, dass für diese Distribution

$$pV(\frac{1}{x^2}) = -DpV(\frac{1}{x}) \qquad \text{gilt.}$$

Aufgabe 3

Es sei $E(x,t) := \dfrac{1}{2a} H(at - |x|), (x,t) \in \mathbb{R}^2, a > 0$ konst.

Zeigen Sie, dass in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$

$$D_2^2 E - a^2 D_1^2 E = \delta \qquad \text{gilt.}$$

Aufgabe 4

Zeigen Sie: Für jedes $k \in \mathbb{R}$ ist $E(x) = -\dfrac{1}{4\pi} \dfrac{\cos k\|x\|}{\|x\|}$ im $\mathbb{R}^3$ lokal integrierbar und genügt, als Distribution aufgefasst, der Differentialgleichung

$$(\Delta_3 + k^2)E = \delta\,.$$

$(\Delta_3 = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2$ bzw. $\Delta_3 = D_1^2 + D_2^2 + D_3^2)$.