UNIVERSITÄT KARLSRUHE
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. A. Müller-Rettkowski

SS 2009
19.06.2009

9. Übungsblatt
Distributionentheorie

Aufgabe 1

Es sei $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ und es gelte für ein $m \in \mathbb{N}$

$$x^m T = 0 \quad (\text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}))\,.$$

Zeigen Sie: $\operatorname{supp}(T) = \{0\}$.

Aufgabe 2

Es sei $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ und $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Definiere $C(x) := T(\tau_x \check{\psi}), x \in \mathbb{R}^n$.

Zeigen Sie: $C \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

Aufgabe 3

Definition: $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \leftrightarrow$ für jedes Paar α, β von Multiindizes gilt

$$p_{\alpha\beta}(\varphi) := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| < \infty.$$

Es sei $(\varphi_j)_j$ eine Folge in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Definition: $(\varphi_j \to 0 \quad (j \to \infty) \text{ in } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)) \leftrightarrow (p_{\alpha\beta}(\varphi_j) \to 0 \quad (j \to \infty)\ \forall\, \alpha, \beta)$.

a) **Zeigen Sie:**
Es gilt $\varphi_j \to 0 \quad (j \to \infty)$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$
$\leftrightarrow$
Es sind erfüllt:

1. Zu jedem Paar α, β von Multiindizes gibt es eine Konstante $C_{\alpha\beta}$ mit

$$p_{\alpha\beta}(\varphi_j) \le C_{\alpha\beta} \quad , \ j = 1, 2, \ldots .$$

2. Für jeden Multiindex β gilt

$$\partial^\beta \varphi_j \to 0 \quad (j \to \infty)$$

gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge des $\mathbb{R}^n$.

b) $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ liegt dicht in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

c) Aus $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ folgt $\varphi * \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.