1. Kapitel Motivierende Beispiele, Einleitende Bemerkungen

1.1. Mit $Au = -(pu')' + qu$, $p > 0$, $p \in C^1[a,b]$, $q \in C^0[a,b]$,
mit $M = \{u \in C^2(a,b) \cap C^1[a,b] \,/\, B_a u = \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0,$
$B_b u = \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0\}$
wird $L := A_{|M} : M \to C^0[a,b]$ betrachtet und zu gegebenem $f \in C^0[a,b]$ $u \in M$ mit $Lu = f$ gesucht.

Satz 1 Ist dies Problem lösbar, dann hat man

$$u(x) = \int_a^b g(x,\xi) f(\xi)\, d\xi, \quad a \le x \le b, \quad \text{mit}$$

$$g(x,\xi) = \begin{cases} -\dfrac{u_1(x)\, u_2(\xi)}{p(\xi)\, W(\xi)}, & a \le x \le \xi \\[2mm] -\dfrac{u_1(\xi)\, u_2(x)}{p(\xi)\, W(\xi)}, & \xi \le x \le b \end{cases}$$

(der Greenschen Funktion zu L). u_1, u_2 werden aus $Au_j = 0$ $(j = 1,2)$, $a < x < b$, $B_a u_1 = B_b u_2 = 0$ und $W(x) = u_1(x) u_2'(x) - u_1'(x) u_2(x) \neq 0$ bestimmt.

Es sei $\xi \in (a,b)$ fest. $g(\cdot,\xi)$ ist Lösung des Problems

$$Ag(x,\xi) = \delta(x,\xi), \quad a < x < b, \quad B_a g = B_b g = 0,$$

wobei $\delta(x,\xi)$ durch $\delta(x,\xi) = 0$ für $x \neq \xi$ und $\int_0^1 \delta(x,\xi)\, dx = 1$ gegeben ist. Gemäß Satz 1 hat man auch: $f(x) = \int_a^b \delta(x,\xi) f(\xi)\, d\xi$.

Physikalisch ist $g(x,\xi)$ die Antwort eines durch L beschriebenen physikalischen Systems auf eine Punktquelle (Temperatur, Ladung, Masse, ...) der Stärke 1 (δ ist die zugehörige Dichte), die an der Stelle ξ wirkt.

Fragen: 1/ g ist nicht stetig diff'bar $\left(g_x(\xi^+,\xi) - g_x(\xi^-,\xi) = -\frac{1}{p(\xi)}\right)$.
Was bedeutet $Ag (= \delta)$?

2/ δ ist keine Funktion. Wie ist eine Gleichung wie $Ag = \delta$ zu verstehen?

3/ Wie beschreibt man mathematisch Punktquellen?

1.2 — Eine klassische Lösung der 1-dim Wellengleichung (der Gleichung etwa der schwingenden Saite) (1) $v_{xx} - v_{yy} = 0$ $(y > 0, 0 < x < l)$ ist eine C^2-Funktion, die (1) erfüllt. Jede derartige Lösung hat die Form $v(x,y) = f(x+y) + g(x-y)$ mit C^2-Funktionen f und g. Durch den klassischen Lösungsbegriff (C^2) gehen physikalisch sinnvolle Lösungen mit etwa nur stetigen (nicht diff'baren) Anfangsvorgaben verloren.

— Bei der klassischen Betrachtungsweise von (1) tritt weiter die folgende Merkwürdigkeit auf: dreht man das (x,y)-Koordinatensystem um 0 um den Winkel $\frac{\pi}{4}$ in ein (ξ,η)-Koordinatensystem, so wird aus (1) die Gleichung $w_{\xi\eta} = 0$ mit den Lösungen $w(\xi,\eta) = F(\xi) + G(\eta)$, wobei F lediglich einmal diff'bar sein muss und G keinerlei Einschränkungen unterliegt.

— Zusätzlich zu (1) wird (2) $u_{xx} + u_{yy} = 0$ betrachtet.

Die Grenzfunktion einer gleichmäßig konvergenten Folge von C^2-Lösungen von (2) ist wieder eine C^2-Lösung von (2), während die Grenzfunktion einer gleichmäßig konvergenten Folge klassischer Lösungen von (1) zwar wieder von der Form $f(x+y) + g(x-y)$ ist aber im i.a. lediglich stetig ausfällt und somit keine klassische Lösung ist.

Solche Diskrepanzen klingen unlogisch und sind unbefriedigend.

- Ähnlich liegt es mit den folgenden Ergebnissen für die inhomogenen Gleichungen (1), (2): Für $F \in C_0^1(\mathbb{R}^2)$ wird eine klassische Lösung von (3) $v_{xx} - v_{yy} = F$ durch

$$v(x,y) = -\frac{1}{2} \int_{\eta=0}^{y} \int_{\xi=x-(y-\eta)}^{x+(y-\eta)} F(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta \qquad (5)$$

und eine klassische Lösung von (4) $u_{xx} + u_{yy} = F$

durch $$u(x,y) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} F(\xi,\eta) \ln[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]\, d(\xi,\eta) \quad (6)$$

gegeben. Die Gleichungen (3), (4) sind im klassischen Sinn für $F \in C_0^0$ definiert und sinnvoll. Dann sind aber die "Lösungen" (5), (6) nur einmal stetig diff'bar also keine Lösungen.

- Für schwache Lösungen (Vertreter von Lösungen im Distributionen-Sinn) treten die vorgestellten Ungereimtheiten nicht auf.

$v \in C^0$ heißt <u>schwache Lösung</u> der DGl (3), falls <u>für alle $\phi \in C_0^2(\mathbb{R}^2)$,</u>

$$\underline{\iint v(\phi_{xx} - \phi_{yy})\, d(x,y) = \iint F\phi\, d(x,y)} \quad (7)$$

gilt.

Man hat: Jede klassische Lösung von (3) ist schwache Lösung (also Lösung von (7)). Umgekehrt ist jede Lösung v von (7), die in C^2 liegt, klassische Lösung (also Lösung von (3)) von (3).

— Lineare Funktionale $\mathcal{L}: C_0^k \to \mathbb{C}, \phi \to L(\phi)$,
wie etwa bei vorgegebenem $v \in C^0$ und $k=2$:

$$\begin{array}{l} \phi \longrightarrow \iint v(\phi_{xx} - \phi_{yy})\,dxdy, \\ C_0^2 \longrightarrow \mathbb{C} \end{array}$$

werden im weiteren Verlauf der Vorlesung eine zentrale Rolle spielen (sie sind im wesentlichen die Distributionen mit noch einigen Zusatzeigenschaften).
Kann $\mathcal{L}$ wie unter (7) mittels einer Funktion F durch ein Integral dargestellt werden, so wird ("die Distribution") $\mathcal{L}$ mit (der Funktion) F identifiziert.
Nicht alle linearen Funktionale können durch Integrale dargestellt werden.
"Eine schwache Lösung von (3) ist eine spezielle Distribution", nämlich eine, die mittels eines Integrals und einer Funktion repräsentiert werden kann.
— In der Physik treten z. B. die Funktionale auf:

$\mathcal{L}(\phi) = \phi(a), \phi \in C_0^0(\mathbb{R})$, zur Beschreibung eines Massenpunktes an der Stelle a

und $\mathcal{L}(\phi) = \phi'(0), \phi \in C_0^1(\mathbb{R})$, zur Beschreibung eines Dipols im Punkt 0 mit Moment 1.