1. Lemma 1: Es sei $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Es gilt $T_{|\Omega \setminus \mathrm{supp}(T)} = 0$

und: aus ω offen, $\omega \subset \Omega$ und $T_{|\omega} = 0$ folgt $\omega \subset \Omega \setminus \mathrm{supp}(T)$.
(" $\Omega \setminus \mathrm{supp}(T)$ ist die größte in Ω offene Menge, auf der $T = 0$ gilt ")

2. Satz 3: Es sei $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Es gilt dann $T(\varphi) = 0$ für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ mit $\mathrm{supp}(\varphi) \cap \mathrm{supp}(T) = \emptyset$.

Lemma 2: Aus $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, K kompakt, $K \subset \Omega$ und $T(\varphi) = 0$ für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ mit $\mathrm{supp}(\varphi) \cap K = \emptyset$ folgt: $\mathrm{supp}(T) \subset K$.

Lemma 3: Es sei $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ und $\psi \in C^\infty(\Omega)$. Dann gilt:

$$\mathrm{supp}(\psi T) \subset \mathrm{supp}(\psi)$$

Lemma 4: Für $f \in C^\infty(\Omega)$ und $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ gilt: $\mathrm{supp}(f D^\alpha T) \subset \mathrm{supp}(T)$ für jeden Multiindex α

Bemerkungen 1) Lemma 4 und $\alpha = 0$: $\mathrm{supp}(fT) \subset \mathrm{supp}(T)$ (*)
Dies und Lemma 3: $\mathrm{supp}(fT) \subset \mathrm{supp} f \cap \mathrm{supp} T$
2) Lemma 4 und $f = 1$: $\mathrm{supp}(D^\alpha T) \subset \mathrm{supp}(T)$ (**)

(*), (**) werden auch so formuliert:

$$\left.\begin{array}{l} f \in C^\infty(\Omega), T \in \mathcal{D}'(\Omega) \to fT \in \mathcal{D}'(\Omega) \\ T \in \mathcal{D}'(\Omega) \to D^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega) \end{array}\right\} \text{ sind \underline{lokale} Operationen.}$$

3) Weder in (*) noch in (**) darf "$\subset$" durch "$=$" ersetzt werden:

- $\mathrm{supp}(x\delta) \subset \mathrm{supp}(\delta)$ $(\neq)$
- c konst: $D^\alpha I_c$. $\mathrm{supp}(D^\alpha I_c) \subset \mathrm{supp}\, I_c$ ($\neq$ für $\alpha \geq 1$)

Lemma 5: Es sei $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ und V sei offene Teilmenge von Ω mit $\operatorname{supp}(T) \subset V$. Ist $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ und gilt $\varphi \equiv 1$ auf V, so folgt $\varphi T = T$.

4.3 Distributionen mit kompaktem Träger

1. $\mathcal{E}(\Omega)$

ist der Raum $C^\infty(\Omega)$, wenn Konvergenz wie folgt definiert wird:

$(\varphi_j)_j$ sei eine Folge von $C^\infty(\Omega)$-Funktionen.

$\varphi_j \to 0 \ (j \to \infty)$ in $\mathcal{E}(\Omega)$

$\overset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow}$ für jeden Multiindex α gilt $\partial^\alpha \varphi_j \to 0 \ (j \to \infty)$ gleichmäßig auf jeder kompakten Menge $K \subset \Omega$.

$\Longleftrightarrow$ für jedes $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und jede kompakte Menge $K \subset \Omega$ gilt: $p_{k,K}(\varphi_j) := \sum_{|\alpha| \le k} \sup_K |\partial^\alpha \varphi_j(x)| \to 0 \ (j \to \infty)$

(Durch $p_{k,K}(\varphi) = \sum_{|\alpha| \le k} \sup_K |\partial^\alpha \varphi(x)|$, $\varphi \in C^\infty(\Omega)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $K \subset \Omega$ kompakt

wird auf $\mathcal{E}(\Omega)$ ein Halbnormensystem definiert.)

Satz 4 $\mathcal{D}(\Omega)$ liegt in $\mathcal{E}(\Omega)$ dicht

(Zu $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega)$ gibt es eine Folge $(\varphi_j)_j \subset \mathcal{D}(\Omega)$ mit

$p_{k,K}(\varphi - \varphi_j) \to 0 \ (j \to \infty)$, für jedes $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und jede kompakte Menge $K \subset \Omega$.)

2. $\mathcal{E}'(\Omega)$

$L : \mathcal{E}(\Omega) \to \mathbb{C}$ sei lineares Funktional. L heißt stetig, falls aus $\varphi_j \to 0 \ (j \to \infty)$ in $\mathcal{E}(\Omega)$ folgt: $L(\varphi_j) \to 0 \ (j \to \infty)$

Definition: $\mathcal{E}'(\Omega)$ ist der Raum der in diesem Sinne stetigen linearen Funktionale auf $\mathcal{E}(\Omega)$.

Satz 5 (vgl Satz 3, Kapitel 3)
$L \in \mathcal{E}'(\Omega) \leftrightarrow$ es gibt ein $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, eine kompakte Menge $K \subset \Omega$ und eine Konstante $C > 0$ derart, dass

$$|L(\varphi)| \leq C\, p_{K,k}(\varphi) \quad \forall \varphi \in C^\infty(\Omega) \text{ gilt.}$$

Lemma 6 $\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{E}(\Omega)$
(10.ü, A1) : Aus $(\varphi_j)_j \subset \mathcal{D}(\Omega)$ und $\varphi_j \to 0$ $(j \to \infty)$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ folgt:
$\varphi_j \to 0$ $(j \to \infty)$ in $\mathcal{E}(\Omega)$.

Satz 6 Aus $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$ folgt: $T_{|\mathcal{D}(\Omega)} \in \mathcal{D}'(\Omega)$ und supp (T) ist kompakte Teilmenge von Ω.
(" $\mathcal{E}'(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ ")

Satz 7 Es sei $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ und supp $(T) \subset \Omega$ sei kompakt. Dann gibt es genau ein $\tilde{T} \in \mathcal{E}'(\Omega)$ mit $\tilde{T}_{|\mathcal{D}(\Omega)} = T$

Die Sätze 6 und 7 rechtfertigen die Sprachregelung, bei Funktionalen aus $\mathcal{E}'(\Omega)$ von Distributionen mit kompaktem Träger zu sprechen.

Weiter mit Literatur:

[14] L. Schwartz Théorie des Distributions Paris 1978

[15] Reed, Simon Methods of Modern Mathematical Physics Vol I, II Academic Press 1972

[16] Yosida, K. Functional Analysis Springer 1971